

(18) 96-100

需求系统的分形研究*

董景荣^①

段虞荣^②

F224
O174.12

① 重庆大学工商管理学院, 重庆, 400044; ② 重庆大学系统工程及应用数学系, 第一作者 29岁, 男, 博士生

摘要 以关联函数、关联积分为工具, 研究了需求系统的分形特征, 并对需求系统的时间序列进行了分形分析, 寻找出无标度区, 计算出分维数, 进而发现无标度区的位置、分维数的大小等, 可作为反映经济波动的定量指标。

关键词 无标度区; 关联维数; 需求系统; 分形
中国图书资料分类法分类号 O174.12; F224

经济系统

0 引言

分形与混沌作为研究非规则和极为复杂的非线性问题的有效工具, 已经在许多领域中得到应用并取得了很大成功^[1~7], 笔者侧重探讨分形分析在需求演变研究中的应用。

需求系统是一个复杂的非线性动态系统, 不断地再需求是建立在前期需求基础之上的复杂运行过程。在市场机制作用下, 其运行具有自组织特征, 从而表现出内在的伪随机性。依此观念, 1981年美国经济学家本哈比伯(Benhabib)和德依在《经济研究评论》上发表了题为“合理选择与不稳定的行为”的文章, 应用混沌理论研究效用函数性态, 但他们将 $g(x, y, d)$ ^[2] 函数(效用函数的参数依赖于前期的选择)定义得较为特殊。在文献[1]中, 我们将 $g(x, y, d)$ 函数定义得更为一般的情况下, 构建了需求系统的非线性动态模型, 研究了效用最优时该模型的稳定性, 并且初步分析了它的倍周期现象和出现混沌现象的可能性, 提出了该系统的控制问题。笔者在文献[1]的研究基础上, 以相空间重构技术、关联积分、关联维数为工具, 进一步对需求系统处于混沌状态时的时间序列进行分形研究, 确定了无标度区, 计算出关联维数, 进而发现: 无标度区的位置、关联维的大小都具有一定的经济学意义, 可以作为反映经济波动特征的一种指标。

1 需求系统数学模型^[1]

在文献[1]中, 我们推导出需求系统的数学模型为:

$$\begin{cases} x_{t+1} = d(M/P_1)x_t^\beta \\ y_{t+1} = M/P_2 - P_1x_{t+1}/P_2 \end{cases} \quad (1)$$

进而我们可将需求系统(1)转化为:

$$x_{t+1} = d(M/P_1)x_t(M/P_2 - P_1x_t/P_2)^\beta \quad (2)$$

* 收文日期 1997-08-10

对该模型的建立从经济学的角度作一些说明：

1) 需求理论告诉我们, 产品的需求量取决于一系列因素, 主要有产品价格(P)、有关产品价格(P_i)、预期价格(P_e)、家庭收入(M)、个人偏好(F)、时间变化(t), 根据需求法则, 一种产品的需求量与价格之间具有反向关系, 需求曲线是一条自上方向右下倾斜的曲线。为什么会这样呢? 这就需要探讨需求函数背后的消费者行为, 通称消费理论。

2) 目前国内外对消费者行为的分析, 可分为以下两大类: 确定性的分析(含基数效用理论, 序数效用理论, 显示性偏好理论) 与不确定性的分析(含风险情况下的消费选择)。

3) 该模型建立采用基数效用分析法(亦称边际效用分析法), 该模型反映了消费者均衡*时需求的演变态势。

4) 消费者往往同时消费多种产品, 为便于分析, 该模型假定 t 时刻只消费 x_t, y_t 两种产品; 效用函数的选择考虑的是 x_t, y_t 的效用会相互影响的情形。如盐的效用, 在单独使用时可能很小, 但加入菜中, 效用就会变大。

2 相空间重构技术与关联维数

对于一个经济系统, 通常只能得到一个时间序列 $\{x_t\}_{t=1}^N$, 现希望由 $\{x_t\}_{t=1}^N$ 的信息得到该经济系统的某些整体信息。常用的方法是相空间重构法, 即对任意时刻 t , 构造一个 n 维向量:

$$x_t^* = (x_t, x_{t+\tau}, \dots, x_{t+(n-1)\tau})^T \quad (3)$$

其中 τ 为正整数。用这种方法可以得到一个 n 维向量时间序列 $\{x_t^*\}_{t=1}^N$, 它可以看成是 n 维 Euclid 空间 R^n 中某一个离散动力系统的轨道, 这里的 R^n 称为嵌入空间, n 称为嵌入维数, 通过这种方法, 就可以把时间序列 $\{x_t\}_{t=1}^N$ 转换为 R^n 中的一个相轨道。Takens^[5] 于 1981 年已证明, 当 n 充分大时, 上述这种转换不改变原经济系统吸引子的分维、Ляпунов 指数等几何信息。

由上述状态空间重构理论知道, 为了获取时间序列 $\{x_t\}_{t=1}^N$ 的信息, 只须研究向量时间序列 $\{x_t^*\}_{t=1}^N$ 的几何信息。而最常用的就是 $\{x_t^*\}_{t=1}^N$ 所对应的离散动力系统的吸引子的分维。Grassberger-Procaccia 提出了用 $\{x_t^*\}_{t=1}^N$ 估计分维的一种方法^[7]。先计算关联积分

$$c(n, N, \epsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i, j} H(\epsilon - \|x_i^* - x_j^*\|) \quad (4)$$

其中 n 为嵌入维数, $N = N - (n-1)\tau$, $H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1, & z \geq 0 \end{cases}$, $\|x\|$ 表示最大模, 即 $\|x\| = \max_{0 \leq i < n-1} |x_{i+\tau}|$ 。

通过数据的滤波处理和对相空间维数 n 的调整, 可以在双对数坐标中得到关系式

* 消费者均衡是指: 消费者以一定的收入, 在一定市场价格下购买一定数量的产品, 能够获得的最大满足的状态——总效用最大的状态。

$$D = \ln c(n, N, \varepsilon) / \ln \varepsilon \quad (5)$$

如果在 n 取某个整数时, D 达到饱和值, 这个饱和值就是所研究系统吸引子的维数. n 为建立动力学模型所需实质性状态变量的最小数目.

在理论分析中, 通常取

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln c(n, N, \varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (6)$$

式(5)中 D 就是对关联维数的很好逼近.

3 需求系统的分形特征

根据上述方法, 编了计算关联积分与关联维数的 C 语言程序, 计算文献[1]中需求系统处于混沌状态时, 需求量时间序列 $\{x_t\}$ 的关联维数 $D = 0.824$, 如图 1 图 2 所示. 其中长度 $N = 50$, $T = 1$. 并根据文献[6]中的算法, 在微机求得该序列的无标度区为 $[\ln \varepsilon_1, \ln \varepsilon_2] = [0.915, 1.609]$.

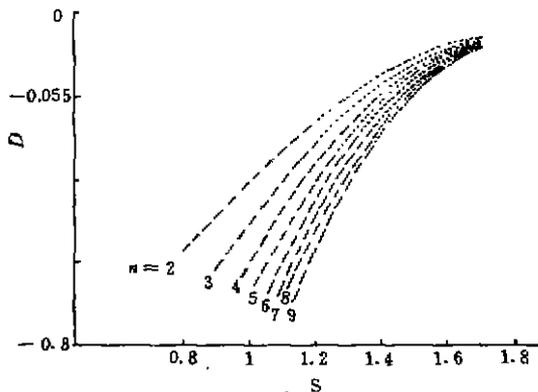


图 1 双对数图中直线的斜率为关联维 D

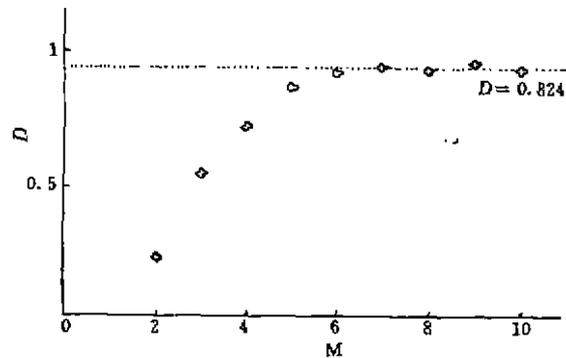


图 2 关联维 D 与相空间维数 m 的关系

4 经济学解释

上述计算结果可以从经济学的角度得到合理的解释, 需求现象虽是一个复杂的现象, 但其内部却隐藏着某种共同而且是简单的规律, 并且在本质上起主导和控制作用的因素不多. 计算结果表明, 当相空间的维数 $m = 6$ 时, 关联维 D 达到了饱和值 0.824 (图 2). 这说明驱动需求系统的实质性状态变量的个数至少为 6 个, 这与《微观经济分析》^[8] 中需求量主要取决于产品价格 (P), 有关产品价格 (P_r), 预期价格 (P_e), 家庭收入 (M), 个人偏好 (F) 和时间变化 (t) 等 6 个独立经济变量的理论相一致.

另一方面, 由于分维是表征控制变量多少的一个量, 分维小, 说明变量少. 在经典的意义上, 维数就是描述空间一个点所需独立坐标的数目. 计算结果表明关联维 $D = 0.824$, 这说明在消费品的各种价格和消费者的收入不变的前提下, 影响需求变动最关键的变量是个人偏好. 这也可以从效用函数得到合理的论证. 在文献[1]中, 我们曾通过变换得出效用函数 u_{t+1}

与需求系统(1)是同一问题,而“效用”在经济理论中被定义为人们消费一种产品所得到的满足,它主要取决于消费者的个人偏好。

5 对经济波动的反映

由前面的研究我们已经看到,由基本方程模拟的再需求过程中,需求量时间序列存在无标度区,并且已经确定出无标度区的位置和关联维的大小,这就为我们借助分形理论来把握经济规律、研究经济波动现象提供可能。

5.1 关联维 D 与经济波动

由关联积分的定义知:关联积分表示在时间序列 $\{x_i\}$ 中点对的距离不超过 ϵ 的点对数在所有点对数中所占的比例,因而它是一种空间相关性度量。

当 N 充分大时,设: $c(n, N, \epsilon) \rightarrow c(n, \epsilon)$, 当 $\{x_i\}$ 为 i, i, d , (独立同分布) 序列时,有

$$c(n, \epsilon) = [c(1, \epsilon)]^n \quad (7)$$

因此, $c(n, \epsilon)$ 刻划了 n 个相邻距离为 τ 的观测值的联合分布的集中程度,这实际上是一种分布函数,即 $c(n, \epsilon) = \int_0^\epsilon c'(n, \epsilon) d\epsilon = \int_0^\epsilon D\epsilon^{D-1} d\epsilon = \epsilon^D$, 其密度函数为: $c'(n, \epsilon) = D\epsilon^{D-1}$, D 是唯一的参数,这里利用相空间重构法使我们从单一数据序列中取出了需求系统波动特征的信息,在重构的空间中,相点的疏密程度是对波动的一定程度上的反映,且是更全面的反映(由于取的是两两相点间的距离,没有信息损失),所取出的信息要比单纯波动信息更多。而代表相点疏密程度的分维(关联维) D , 就反映了需求系统整个时间序列的波动特征,即“波动谱”的整体特征。

5.2 $[\epsilon_1, \epsilon_2]$, n 与经济波动

ϵ_1 大致反映数据序列的噪声背景的大小。由于需求系统不断受到内外各种因素的影响,而发生随机扰动,所以存在着背景噪声。既然 ϵ_1 反映着系统噪声的幅度,是有规律波动和无规律噪声的分野,那么,在 $\epsilon < \epsilon_1$ 时,系统噪声便会表现出来,并且在任何一维上都起作用。 n 的值反映了模型中驱动需求系统的独立变量个数是 n 个。

ϵ_2 是最大的“点对”的距离,反映了需求系统最大的起伏度,也是有规律波动的另一个边界,在一定程度上反映了需求系统最大波幅的信息。

总之,由于对不同种类的经济波动的状态, $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ 与 D 会表现出不同的特点,所以,无标度区间的位置、分维 D 在一定程度上可作为反映经济波动的一个指标。

6 结束语

综上所述,我们用分形论的观点研究了需求系统的分形特征,指出了分形特征量与经济波动之间存在的深刻联系,从而为建立经济波动预测理论奠定了理论基础。

同时,这也反映出当代科学交叉汇合的大趋势。尽管经济学中已广泛应用统计学和其它数学方法,但经济系统一般情况是一个非线性的动态系统^[9],分岔和混沌这样一些演化阶段,是不可能用一般的线性数据方法去描述的。由于运用了分形这个研究工具,存在于经济系统中未曾发现的规律,将会被揭示出来。

参 考 文 献

- 1 董景荣,段虞荣. 需求系统的长期性态反其混沌特征. 见:系统科学理论与应用. 成都:四川大学出版社,1996. 173~178
- 2 Benhabib J, Day R H. Rational and Erratic Behaviour. *Review of Economic Studies*, 1981, 45(3), 459~471
- 3 Day R H. Irregular Growth Cycle. *The American Economic Review*, 1982, (72), 406~414
- 4 黄登仕,李后强. 非线性经济学的理论和方法. 成都:四川大学出版社,1993. 187~190
- 5 Takens F. Dynamical Systems and Turbulence. In: Warwick. *Lectures Notes in Mathematics*. New York, Springer Verlags, 1980. 366~376
- 6 李后强,汪富泉. 分形理论及其在分子科学中的应用. 北京:科学出版社,1993. 179~184
- 7 Grassberger P, Procaccia J. Characterization of Strang's Attractor. *Phys Rev Lett*, 1983, (50), 346
- 8 黎诣远. 微观经济分析. 北京:清华大学出版社,1994. 15~20
- 9 Day R H. The Emergence of Chaos From Classical Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 1983, (5), 201~213

A Study on the Systems of Demand Using Fractal Theory

Dong Jingrong *Duan Yurong*

(Department of College of Business Administration, Chongqing University)

ABSTRACT Using correlation function and correlation integral as tools. The fractal characteristics of the time series of demand systems in authors' previous work are revealed, the nonscale intervals are found out, and the fractal dimensions are calculated. Further study shows that the position of nonscale and the size of the correlation dimension all have certain economic meanings and may be taken as quantitative indices for reflecting the economic fluctuation.

KEYWORDS nonscale interval; correlation dimension; the systems of demand; fractals