1998 年 3 月　　重庆大学学报 （自然科学版）　　Vol. 21, №. 2
第 21 卷第 2 期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Mar. 1998

·综述·

(21) 111-116

多种小波基应用性能分析（Ⅰ）*

O174.2

李建平[①**]　张万萍[②]　陈廷槐[①]　徐问之[①]
（① 重庆大学计算机研究所，重庆，400044；② 电子科技大学；第一作者 32 岁，男，博士生）

摘　要　将近年来提出的各种典型的小波基（小波函数）进行汇总，对其有关理论问题和应用时需要注意的具体细节进行详细分析，对科技工作者和工程技术人员有一定的实用价值。

关键词　性能分析／小波变换；小波基
中国图书资料分类法分类号　O174.2

1　小波基应满足的条件

众所周知，凡满足如下允许性条件(admissible condition)

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{w} \mathrm{d}w < +\infty \tag{1}$$

的函数 $\psi(t)$ 称为一个小波（或母小波），注意到式(1) 与下式等价

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{2}$$

因此 $\psi(t)$ 具有一定振荡性，即它包含着某种频率特性。

对满足式(1) 或式(2) 的小波函数 $\psi(t)$ 作伸缩、平移得

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{3}$$

式中　$b \in R, a \in R - \{0\}$

$\psi_{a,b}(t)$ 称为真正的小波，若取 $a = 2^j, b = k2^j$，则由式(3) 得

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t - k) \tag{4}$$

$\{\psi_{j,k}(t) \mid j,k \in Z\}$ 自然构成 $L^2(R)$ 的一组正交小波基，因此可知，有了小 波函数自然有了小波基，故本文主要汇总小波函数。

式 (1) 是小波函数应满足的基本条件，为满足某些特殊要求，尚可增加一些条件，如 M 阶消失距等等。高维小波函数的允许性条件与式(1) 完全类似，只不过多几个积分变量而已。显然小波函数有无穷多个，故小波基也有无穷多组，构造一组小波基的一般方法是多分

---

* 收文日期　1997-05-29
重庆市中青年科技专家基金资助项目

** 作者现在重庆后勤工程学院工作

辨分析。

2 一维小波函数汇总分析

2.1 单周正弦小波[1]

$$\psi_{sin}(t)=\begin{cases}\pi^{-1/2}\sin(t), & |t|\leqslant\pi\\ 0, & 其它\end{cases}$$

这个小波函数的使用范围极为有限。

2.2 墨西哥帽子小波（亦称 Bubble 小波）[1]

$$\psi_{bub}(t)=(1-t^2)\exp(1-t/2) \tag{5}$$

通常用该函数来描述神经元之间的侧抑制。所谓侧抑制是指相邻的神经元之间能够彼此抑制对方兴奋的现象。由于 Bubble 函数无限光滑即无穷次可微，因此它不对单独的噪声点敏感，而其独特的时域性质，使得它对信息进行漫画式的夸张，使得包含信息的特征点特别突出，在频域中 Bubble 函数是一带通滤波器，可以用 Bubble 函数构成小波进行多通道时频联合分析，Bubble 小波主要用于图像边缘提取、基音检测等。

若选取 Gauss 函数作为尺度函数，即

$$\varphi_{bub}(t)=\exp(-t^2/2) \tag{6}$$

则由文献[1] 立即得到其 Mallat 算法所用的滤波器系数 $h(k)$ 和 $g(k)$，见附表。

附表 一组 $h(n)$ 和 $g(n)$ 的值

n	−3	−2	−1	0	1	2	3
$h(n)$	0.051 4	0.118 3	0.195 0	0.230 3	0.195 0	0.118 3	0.051 4
$g(n)$	−0.137 0	−0.525 6	0.173 3	0.307 1	0.173 3	−0.525 6	−0.137 0

2.3 Hardy 小波[2]

若小波 $\psi(t)(t\in R)$ 的 Fourier 变换 $\hat{\psi}(w)$ 对 $w<0$ 恒为零，则称小波 $\psi(t)$ 为 Hardy 小波，亦即满足

$$\hat{\psi}(w)=\begin{cases}0, & w<0\\ \hat{\psi}(w), & w\geqslant 0\end{cases} \tag{7}$$

的函数 $\psi(t)$ 称为 Hardy 小波，它比较适合电力系统的故障分析。

2.4 Daubechies 小波[3]

这类小波常记为 ψ_N^D，$(N\geqslant 2)$，简称 D- 小波，D- 小波是具有紧支集的规范正交小波，ψ_N^D 及其 φ_N^D 没有显式解析式，且不具备对称性，从而不具有线性相位，光滑性也较差，要增加其光滑性，需要增加支集的长度 N，但这样做增加了运算量，D- 小波常用数表给出 $h(n)$，而 $g(n)$ 由下式计算

$$g(n)=(-1)^{n-1}h(2N-n+1) \qquad n=1,2,\cdots,2N$$

其支集为 $\mathrm{supp}\psi_N^D=[-(N-1),N]$，$\mathrm{supp}\varphi_N^D=[0,2N-1]$

ψ_N^D 是应用范围宽广且影响深远的著名小波，Daubechies 也因提出此小波而闻名世界。目前，ψ_N^D 在许多应用领域取得良好效果，ψ_N^D 的不足之处，除前面所叙外，理论分析不方便。

2.5　Morlet 小波[4]

Morlet 小波函数 $g(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} + j\omega_0 t\right)$，式中 $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位，$\omega_0 \geqslant 0$，$g(t)$ 的 Fourier 变换为 $\hat{g}(\omega) = \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}\right]$，若参数 ω_0 充分大，则可把 Morlet 小波的 Fourier 变换的负频函数值视为零，这个误差在某些情况下比较大，为进一步减少误差，可提出一个改进的 Morlet 小波 $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(it + \omega_0)\exp\left(-\frac{t_2}{2} + j\omega_0 t\right)$，式中参数 $\omega_0 \geqslant 0$. 关于 $g(t)$ 与 $\psi(t)$ 有如下的性质。

1）Morlet 小波 $g(t)$ 不是基小波（因为 $g(t)$ 只是近似满足允许条件），$\psi(t)$ 是基小波，满足允许条件。

2）Morlet 小波 $g(t)$ 与改进的 Morlet 小波 $\psi(t)$ 有如下关系

$$\int_{-\infty}^{0}[|g(t)| - |\psi(t)|]dt > 0$$

上式表明作为 Hardy 小波用于计算，改进的 Morlet 小波 $\psi(t)$ 较 Morlet 小波的误差更小。

2.6　单边指数小波[5]

这种小波的显式表达式为

$$\psi_{SE}(t) = \exp(-\lambda t)\sin(\Omega_0 t + \theta_0)u(t) \tag{8}$$

式中 $\theta_0 = -\operatorname{arctg}(\Omega_0/\lambda)$. 分析 $\psi_{SE}(t)$，我们发现 $\psi_{SE}(t)$ 是一个非对称衰减函数，它在低信噪化下能准确检测和定位瞬时信号，通过适当选择参数 λ 和 Ω_0，$\psi_{SE}(t)$ 可引进如下双边指数小波 $\psi_{DE}(t)$ 和双边复指数小波 $\psi_{DC}(t)$

$$\begin{cases}\psi_{DE}(t) = \exp(-\lambda|t|)\sin(\Omega_0 t) \\ \psi_{DC}(t) = \exp(-\lambda|t| + j\Omega_0 t)\end{cases} \tag{9}$$

2.7　B- 小波[3,6]

对于每个正整数 m，令 $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$ 表示区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 的特征函数，那么 m 阶 B- 小波用公式给出

$$\psi_B^m(t) = \frac{1}{(2m-1)!}\sum_{j=0}^{4m-3}(-1)^j S_j^{4m-3} \cdot \int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{m-2}} \chi_{[0,\frac{1}{2}]}\left(\chi_{m-1} - \frac{j}{2}\right)dt_{m-1} \tag{10}$$

式中 S_j^{4m-3} 由线性 Pascal 三角形算法求得。

B- 小波是以上这类小波基的总称，B- 小波具有许多重要性质，归纳小结如下：

① 所有小波 ψ_B^m 及其对偶小波 $\tilde{\psi}_B^m$ 对于偶数 m 是对称的，对于奇数 m 是反对称的，故它们都具有广义线性相位。

② ψ_B^m 是唯一的相应于 m 阶基数 B- 样条 N_m（见 2.8 节）具有最小支集的紧支集小波，有

$$\mathrm{supp}\psi_m^B = [0, 2m-1], \qquad \mathrm{supp}\varphi_m^B = [0, m]$$

式中 φ_m^B 是对应于 ψ_m^B 的尺度函数。

③ 每个 ψ_m^B 和它的所有导数有简洁的显式解析表达式，便于理论分析和数值计算。

④ 每个 ψ_m^B 是一个单正交小波，即有

$$\langle \psi_{m_{j,k}}^B, \psi_{m_{l,n}}^B \rangle = 0, \qquad j \neq l; j, k, l, n \in Z$$

⑤ 余弦信号关于偶阶 B- 小波的小波变换为

$$Wf(a,b) = \sqrt{a}\, R_e[\hat{\psi}_m^B(a\omega_0)]\cos(\omega_0 b)$$

式中　$a, b \in R, a > 0$

也就是说原信息与其小波变换在固定尺度的输出信号或者同相或者反相。

⑥ 余弦信号关于奇阶 B- 小波变换为

$$Wf(a,b) = \sqrt{a}\, I_m[\hat{\psi}_m^B(a\omega_0)]\sin(\omega_0 b)$$

式中　$a, b \in R, a > 0$

亦即原信号与其小波变换在固定尺度的输出相差 90°.

⑦ B- 样条 N_m(即 φ_m^B) 的全正性，使得其级数具有"平滑"任何"扰动"的特点；而 ψ_m^B 的"完全振荡"这个性质与 N_m 的全正性相反，它使 ψ_m^B 在应用于不规则事物，如奇特事物定位与检测方面很有效。

性质⑤、⑥可通过以下引理 1 证明。

引理 1　当 a 固定、b 变化时，余弦函数的小波变换 $Wf(a,b)$ 仍为同频的余弦函数，仅是初相和幅值有所改变。

性质①～④及⑦是显然的，或者通过简单数学推导容易得出。

2.8　插值样条小波[7]

这是一类单正交小波，一般记为 ψ_m^I，它具有指数衰减，但并不是紧支集的。$2m$ 阶基本基数样条函数 $L_{2m}(2t-1)$ 的 m 次导数即得到 ψ_m^I，对应的尺度函数 φ_m^I 为 m 阶基数 B- 样条函数 N_m

$$\varphi_m^I = N_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) N_m(2t-n)$$

$$\psi_m^I = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) N_m(2t-n) \tag{11}$$

具体应用 $\psi_m^I(t)$ 时，其相应的 Mallat 算法系数序列为

$$h(n) = 2^{-m+1}\binom{m}{n} \qquad (0 \leqslant n \leqslant m)$$

$$g(n) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} C_{m+n-l-1}^{(2m)}$$

式中 $\{C_l^{(2m)}\}$ 由下面的双无限方程组求出：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k^{(2m)} N_{2m}(m+j-k) = \delta_{j,0} \qquad j \in Z$$

$m=3,4$ 时得 ψ_3^I、ψ_4^I，因为 ψ_3^I、ψ_4^I 十分简单，所以它们的应用非常广泛。$m=1$ 时得到的 ψ_1^I 是最

早的著名 Haar 小波 ψ_H.

Haar 小波 ψ_H 是由[0,1) 上的特征函数 $g(t)=\chi_{[0,1)}$ 所构成的,事实上 $\hat{g}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega/2}\frac{\sin(w/2)}{w/2}$,此时 $H(w)=\frac{1}{2}(1+e^{-iw})$,$G(w)=\frac{1}{2}(-1+e^{-iw})$

$$h(n)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & n=0,1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad g(n)=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{2}} & n=0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & n=1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

2.9 Meyer 小波[8]

取 $\theta(\omega)$ 具有紧支集且无限次可微.并且满足:

① $0\leqslant\theta(\omega)\leqslant 1$,偶函数

②

$$\theta(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in\left[-\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right]\\ 0 & \omega\notin\left[-\frac{4}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right]\end{cases}$$

③ $\theta^2(\omega)+\theta^2(2\pi-\omega)=1, 0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$

令 $\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\overset{\vee}{\theta}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{\theta}(t)$,则 φ 是无穷次可微且在 ∞ 是速降的,计算表明:

$$\begin{aligned}H(\omega)&=\theta(2\omega)\qquad(|\omega|\leqslant\pi)\\ G(\omega)&=e^{-i\omega}[\theta(2\omega+2\pi)+\theta(2\omega-2\pi)]\\ &=e^{-i\omega}\theta(2\pi-2|\omega|)\qquad(|\omega|\leqslant\pi)\\ \hat{\psi}(\omega)&=e^{-i\omega/2}\theta\left(\frac{\omega}{2}\right)[\theta(\omega+2\pi)+\theta(\omega-2\pi)]/\sqrt{2\pi}\\ &=e^{-i\omega/2}\theta(\omega/2)\theta(2\pi-|\omega|)/\sqrt{2\pi}\qquad(\forall\,\omega\leqslant R)\end{aligned}\tag{12}$$

注意到 $\hat{\psi}^{(n)}(0)=0(\forall\, n\in N)$,故 ψ 有无穷阶消失矩,即 $\int t^n\psi(t)\mathrm{d}t=0(\forall\, n\in N)$.

2.10 三角函数小波[9,10]

$$\varphi(t)=g(t)=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{(-\pi,\pi)}(\omega)\right]^{V}=\frac{\sin\pi x}{\pi x}\tag{13}$$

其中 $\chi_{(-\pi,\pi)}(\omega)$ 为$(-\pi,\pi)$ 上的特征函数,符号"V"表示逆 Fourier 变换。

容易算出

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<|\omega|<\pi\end{cases}$$

$$h(n) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\omega n} d\omega = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & n = 0 \\ 0 & n = 2k \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\pi} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} & n = 2k+1 \end{cases}$$

由 $G(\omega) = e^{-i\omega}\bar{H}(\omega + \pi)$ 可知

$$G(\omega) = \begin{cases} e^{-i\omega} & -\dfrac{3\pi}{2} < \omega < -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < \omega < 0 \text{ 或 } -2\pi < \omega < -\dfrac{3}{2}\omega \end{cases}$$

参 考 文 献

1 Daubechies I. The wavelet transform, time-frequency localizzation and signal analysis. IEEE Tran. on IT, 1990, 36(5): 961～1 005

2 石志强，任震，黄雯莹．小波分析及其在电力系统中的应用．电力系统自动化，1997，21(3)：13～17

3 Daubechies I. Orthonormal bases of compactly suported wavelets. Comm. on Pure and Appl. Math., 1988, 41(7): 909～996

4 Rioul O, Vetterli M. Wavelets and signal processing. IEEE SP Magazine, 1991, 7(4): 14～38

5 贾天旭，郑南宁．基于 Bubble 小波的多尺 度边缘提取．电子学报，1996，24(4)，117～121

6 袁晓，廖晓峰，张代远 等．小波及汉语语音分析和处理初探．见：靳蕃，范俊波．神经网络理论与应用研究'96．成都：西南交通大学出版社，1996. 444～447

7 Unser M. On the asymptotic convergence of B-spline wavelets to Gabor function. IEEE Trans on IT, 1992, 389(2): 864～872

8 邓东皋，彭立中．小波分析．数学进展，1991，20(3)：294～310

9 刘贵忠，邸双亮．小波分析及其应用．西安：西安电子科技大学出版社，1992. 25～30

10 李建平．小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现．重庆：重庆出版社，1997，12：100～300

The Performance Analysis of Several Wavelet Bases in Applications(I)

Li Jianping Zhang Wanping Chen Tinghuai Xu Wenzhi

(Institute of Computer Science, Chongqing University)

ABSTRACT Several wavelet bases, including one-dimensional and two-dimensional, are summarized. The performance of the wavelet bases in applications are analyzed. These wavelet bases are useful for researchers and engineers.

KEYWORDS performance analysis / wavelet transform; wavelet bases