(24) 127－130

组合投资有效边界的若干性质和模型*

F830.9

刘锡标① 　伊亨云②
(① 蒙自高等师范专科学校,云南蒙自,661100; ② 重庆大学; 第一作者 36 岁,男,硕士,副教授)

摘 要 证明了组合投资中有效边界的几个性质,并建立了一个计算最优证券组合投资比重向量的数学模型。

关键词 组合投资; 有效边界; 期望收益; 风险
中国图书资料分类法分类号 F224.9

证券

1 组合投资有效边界的模型和性质

设有 N 种证券可供证券投资者选择,第 i 种证券的投资比重(或称组合权重)、期望收益率和标准差(代表风险)分别记为 X_i、$\bar{r}_i$ 和 σ_i,证券 i 和 j 收益间的协方差为 σ_{ij},文[1]导出了如下关系: $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$
其中 ρ_{ij} 为证券 i 和 j 的收益率的相关系数。若记

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_N)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F} = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{R} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_N)^{\mathrm{T}}$,则可导出组合投资的期望收益率 $\bar{r}$ 和风险值 σ 为

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{r}_i = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \tag{1}$$

$$\sigma = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{X})^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为半正定阵,要求 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = 1$.

为研究的方便,通常建立 σ-$\bar{r}$ 直角坐标系[1],笔者也采用这个坐标系。

定理 1 在不允许卖空条件下(即 $X_1, X_2, \cdots, X_N \geqslant 0$),$N$ 种证券组合投资的期望收益率是 N 种证券的期望收益率的加权平均而风险不高于 N 种证券的加权平均风险。当 ρ_{ij} 不全为 1 时,则低于 N 种证券的加权平均风险。

证明 $\because \sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, $-1 \leqslant \rho_{ij} \leqslant -1$, $X_i \geqslant 0$

$\therefore$ $$\sigma = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

* 收文日期 1997-07-11

$$\leqslant (\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X_iX_j\sigma_i\sigma_j)^{\frac{1}{2}} = [(\sum_{i=1}^{N}X_i\sigma_i)^2]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{N}X_i\sigma_i \tag{3}$$

显然仅当 $\rho_{ij} = 1(i,j = 1,2,\cdots,N)$ 时(3) 取等号。 证毕

比较(1)、(3) 两式可知,定理 1 以定量方式证明了组合投资中"分散可以降低风险"这一特性。

引理[2] 若记$(A\Sigma^{-1}A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}$,则在组合证券投资的$\sigma$-$\bar{r}$坐标系中,有效边界上的点$(\sigma,\bar{r})$满足: $\sigma^2 = m_{11}\bar{r}^2 + 2m_{12}\bar{r} + m_{22}$

其中 $A = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \cdots & \bar{r}_N \\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$,$\bar{r}$ 的取值范围是 $\max\left(-\frac{m_{12}}{m_{11}}, r_f\right) \leqslant \bar{r} \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{\bar{r}_i\}$

r_f 为无风险证券投资的收益率。

定理 2 有效边界上的点$(\sigma,\bar{r})$具有下面的性质:

1° $\bar{r}$ 是关于 σ 的严格递增函数;

2° 有效边界是下凹(上凸)的。

证明 1° 剔除可能的端点 $\bar{r} = -\frac{m_{12}}{m_{11}}$ 不影响定理的证明,故可设 $\bar{r} > -\frac{m_{12}}{m_{11}}$. 由引理知

$$\sigma^2 = m_{11}\bar{r}^2 + 2m_{12}\bar{r} + m_{22} \tag{4}$$

将上式对 σ 求导,解出 $\bar{r}'$ 得

$$\bar{r}' = \frac{\sigma}{m_{11}\bar{r} + m_{12}} \tag{5}$$

$\because \sigma > 0$,而 $\bar{r} > -\frac{m_{12}}{m_{11}}$, $\therefore m_{11}\bar{r} + m_{12} > 0$

$\therefore \bar{r}' > 0$,1° 得证。

证明 2° 将式(4) 对 σ 求二次导数得 $1 = m_{11}(\bar{r}')^2) + (m_{11}\bar{r} + m_{12})\bar{r}''$

将(5) 式代人上式得

$$(m_{11}\bar{r} + m_{12})\bar{r}'' = \frac{m_{12}^2 - m_{11}m_{12}}{(m_{11}\bar{r} + m_{12})^2}$$

于是得

$$\bar{r}'' = \frac{m_{12}^2 - m_{11}m_{12}}{(m_{11}\bar{r} + m_{12})^3}$$

由于$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}$是对称正定矩阵,即有 $m_{11}m_{22} - m_{12}^2 > 0$,又 $\bar{r}$ 在有效边界的取值范围内,从而 $\bar{r} > -\frac{m_{12}}{m_{11}}$,即 $m_{11}\bar{r} + m_{12} > 0$,故 $\bar{r}'' < 0$,有效边界是下凹的。 证毕

因为$\bar{r}$是σ的严格递增函数,显然σ也是$\bar{r}$的严格递增函数。这样就从理论上严格证明了追求高收益必然伴随高的风险。

定理 2 的结论 2°,为确定最优证券投资组合点 T 以及投资组合权重提供了理论基础。

设常数 r_f 为投资于无风险证券的收益率,若把资金全部投资于无风险证券作为一个投资方案,该方案在 σ-$\bar{r}$ 坐标系中由点 $F(0,r_f)$ 表示,如图 1 所示。

定理 3 在σ-$\bar{r}$坐标系内,过点 $F(0,r_f)$ 向有效边界(4) 作切线,则切点坐标 $T(\sigma_T,\bar{r}_T)$ 为

$$\bar{r}_T = -\frac{m_{12}r_f + m_{22}}{m_{11}r_f + m_{12}},$$

$$\sigma_T = \sqrt{m_{11}\bar{r}_T^2 + 2m_{12}\bar{r}_T + m_{22}}$$

证明　由(5)知该切线的斜率为

$$K = \frac{\sigma_T}{m_{11}\bar{r}_T + m_{12}}$$

故过 $F(0, r_f)$ 的切线方程为 $\bar{r} - r_f = \frac{\sigma_T}{m_{11}\bar{r}_T + m_{12}}\sigma$，即

$$\bar{r}_T - r_f = \frac{\sigma_T^2}{m_{11}\bar{r}_T + m_{12}} \qquad (6)$$

已知　$\sigma_T^2 = m_{11}\bar{r}_T^2 + 2m_{12}\bar{r}_T + m_{22}$　　(7)

将(7)代入(6)得 $\bar{r}_T = -\frac{m_{12}r_f + m_{22}}{m_{11}r_f + m_{12}}$，代回(7)式得 $\sigma_T = \sqrt{m_{11}\bar{r}_T^2 + 2m_{12}\bar{r}_T + m_{22}}$。

定理证毕

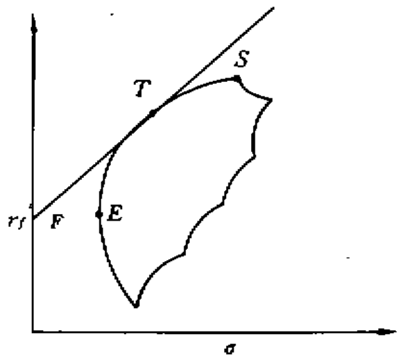

图 1　组合投资的有效边界

对于以收益率 r_f 的无风险证券和风险证券的组合投资的有效边界是图 1 所示的 FT 直线段和 TS 弧线段[1]。利用定理 3 可得当 $\sigma \leqslant \sigma_T$ 时其有效边界(线段 FT)方程为：

$$\bar{r} = r_f + \frac{\sigma_T}{m_{11}\bar{r}_T^2 + m_{12}}\sigma \qquad (\sigma \geqslant 0)$$

当 $\sigma > \sigma_T$ 时($\widehat{TS}$ 弧段)的方程为：

$$\sigma^2 = m_{11}\bar{r}^2 + 2m_{12}\bar{r} + m_{22}$$

文[1]提出了一个资本财产订价模型(CAPM)，定性的引入了有关组合投资的一个重要特性，称为分离定理：就投资而言，风险资产的最优组合(T 点)可不以他们对待风险与收益的偏好而确定。定理 3 给出了 T 点的确定表达式，从而严格的证明了分离定理。

2　非卖空条件下最优投资比例向量的数学规划模型

文[3]给出了允许卖空条件下，有效边界左端点 E 的表达式，它为规划 $\{\min\sigma \mid \text{s. t. } \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = 1\}$ 的解 $X_A = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{F}/\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}$. 在实际应用和理论研究中不允许卖空要显得更重要些。

显然，在不允许卖空条件下有效边界的左端点可由以下规划模型确定：

$$\min\sigma^2 = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{X}$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = 1 \\ X_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \end{cases} \qquad (8)$$

非线性规划问题(8)的求解有一定困难，笔者将其转化为一个线性规划问题求解。

(8)的解必须满足 Kuhn-Tuchen 条件(简称 K-T 条件)，假定在(8)最优解中前 K 种证券的投资比例为 0，则 K-T 条件成为

$$\sum_{j=1}^{N} X_j\sigma_{ij} = \sigma^2 \qquad X_i > 0, i = 1, 2, \cdots, K$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_j\sigma_{ij} \geqslant \sigma^2 \qquad X_i = 0, i = K+1, \cdots, N$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_j = \sum_{j=1}^{K} X_j = 1$$

引入变量 $\triangle_i$，可得不允许卖空条件下组合证券投资的风险最小化线性规划模型：

$$\min Z = \sigma^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} X_j \sigma_{ij} = \sigma^2 + \triangle_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\ X_i \geqslant 0, \triangle_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, N; \triangle_i X_i = 0) \end{cases} \tag{9}$$

模型(9) 的求解可参考文献[4].

对于风险证券最优组合投资点T来说，也存在同样的问题。依照(8) 建立过程，可建立在不允许卖空条件下确定最优投资组合线性规划模型如下：

$$\min Z = \sigma^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} X_j \sigma_{ij} = \sigma^2 + \triangle_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{r}_i = -\dfrac{m_{12} r_f + m_{22}}{m_{11} r_f + m_{12}} \\ X_i \geqslant 0, \triangle_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, N; \triangle_i X_i = 0) \end{cases}$$

参 考 文 献

1 [美]William F. Sharpe 著．投资原理．杨秀苔，刘星编译．重庆：重庆大学出版社，1992. 90～121

2 Tang Xiaowo, Cao Changxiu. Some New Results of the Efficienf Fomtier of Portfolio Investment Journal of UEST of China, 1994, (3): 303～304

3 唐小我．一种组合证券风险最小化的迭代算法．成都：电子科学大学学报，1994，(4)：416～417

4 曾勇，唐小我．非负投资比例约束下的组合证券风险最小化方法．技术经济，1994，(2～3)：110～113

Some Properties and Model of the Efficient Margin in Portfolio Combinatorial Investment

Liu Xibiao *Yi Hengyun*

(Mengzi Teacher's College. Yunnan)

ABSTRACT This paper proves some properties of the efficient margin in portfolio combinatorial investment and presents a methematical model for calculating the optimal weighted vector of portfolio combinatorial investment

KEYWORDS portfolio investment; efficient foontier; expected return; risk