

⑦ 35-40

用线性模拟滤波器实现连续小波变换

田逢春 金吉成

(重庆大学通信与测控工程学院, 重庆, 400044; 第一作者 35 岁, 男, 副教授, 博士)

TN 911.1
TN 713

摘要 提出了用线性模拟滤波器实现连续小波变换的方法, 该方法提供了实现快速小波变换的另一途径, 并给出了构造该滤波器网络的方法, 它以墨西哥帽状小波为例, 证实了其可行性。

关键词 线性网络 / 连续小波变换; 模拟滤波器

中国图书资料分类法分类号 TN713

0 引言

传统的小波变换是用数字计算方法(即离散小波变 DWT)来实现的, 但它有一个不足, 就是其实时处理性差, 例如, 尽管 DWT 的算法速度快于离散余弦变换(DCT), 但它比分块余弦变换的速度低得多, 这是 DWT 还没能正式被国际图像数据压缩标准所采用的原因。笔者提出一种用线性模拟滤波器网络实现小波变换的方案用以克服上述缺点。文中约定 Z 表示整数集, R 表示实数集, $L^2(R)$ 表示所有平方可积的实变量函数构成的线性空间, $\|\cdot\|_2$ 表示 $L^2(R)$ 中的范数平方, 且假定所有的函数都在 $L^2(R)$ 中。

1 原理

设输入的连续信号为 $x(t)$, 记 W_{X_s} 为连续信号 $x(t)$ 的小波变换, $\Psi(t)$ 为小波函数, “*” 代表卷积, 则

$$W_{X_s} = x * \frac{1}{s} \Psi\left(\frac{t}{s}\right) = \frac{1}{s} \int_R x(\tau) \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) d\tau \quad (1)$$

当取 $s = 2^j$, ($j \in Z$) 时得到常用的二进小波变换。传统的实现小波变换框图如下:

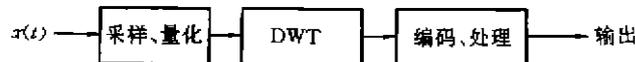


图1 传统的小波变换方法

连续信号 $x(t)$ 经采样、量化后得到离散 $x(n)$, 对 $x(n)$ 进行离散小波变换 DWT 便得到 $x(n)$ 的离散小波变换 $Wx(n)$, 在一定条件下可由它得到信号的连续小波变换^[1], 信号的样点

越多,则数字计算需时越长,且往往是在获得信号的所有样点后再进行计算,例如常用的 Mallat 迭代算法就是这样,这就导致实时处理的困难。

从(1)式可看出,若构造一个冲击响应为 $h(t)$ 的滤波器并使 $h(t) = \frac{1}{s} \Psi\left(\frac{t}{s}\right)$, 则信号通过该滤波器的输出为:

$$y(t) = x * h(t) = x * \frac{1}{s} \Psi\left(\frac{t}{s}\right) = W_{x_s}(t) \quad (2)$$

相应的框图如图 2 所示。

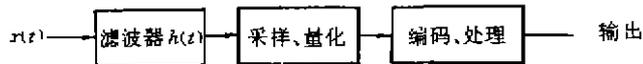


图 2 模拟滤波网络实现小波变换的方法

可见滤波器的输出即是信号 $x(t)$ 在尺度为 s 时的小波变换 $W_{x_s}(t)$, 若对其进行采样、量化,就可得到相应的离散小波变换,以便进行其它处理。取 $s = 2^j$, ($j \in Z$) 就得到常用的二进制小波变换。大多数情况下取 $j = 0, 1, 2$ 就够了^[2], 因此只需构造 $h(t)$ 分别为 $\Psi(t)$ 、 $\Psi\left(\frac{t}{2}\right)$ 、 $\Psi\left(\frac{t}{4}\right)$ 就可以得到相应的三级小波变换。该方法为实时处理提供了可能,尤其是对二维信号(图象)求其二维小波变换的情形。因其数据量巨大,用传统的离散小波变换方法不能达到实时处理,当输入信号是光学信号(例如遥感、气象卫星的图片)时,若能构造一个冲击响应具有二维小波函数形式的光学滤波器,则可立即得到相应的二维小波变换的输出,实现实时压缩、传输。例如对一幅 320×200 的彩色图象在奔腾 75 机上时间为 10 ms 的数量级,而光学滤波器实现二维小波变换则所花的时间可忽略不计。下面论述一维滤波器的构造。

2 滤波器的构造

2.1 滤波器网络冲击响应的逼近

不失一般性,此处只讨论 $h(t)$ 为 $\Psi(t)$ 时的构造方法,至于 $h(t)$ 为 $\Psi\left(\frac{t}{2}\right)$ 、 $\Psi\left(\frac{t}{4}\right)$ 的构造方法完全类似。

设 $u(t)$ 表示阶跃函数,即:
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

则由网络理论可知^[3],若 $h(t)$ 为指数和形式,即

$$h(t) = \sum_{j=1}^N K_j e^{p_j t} u(t) \quad (3)$$

(为保证系统稳定,其中 p_j 是实部为负的复数。) K_j 为复数,则一定可以找到一个 N 阶线性的模拟滤波网络,其冲击响应等于 $h(t)$, 因此现在需要解决的问题是确定式(3)中的 $2N$ 个未知参数 K_j 及 p_j 。假定 T 为某一固定的间隔,由于一般小波函数 $\Psi(t)$ 都不具有指数和的形式,甚至大多数小波函数连显式表达式都没有,只有通过迭代得到的其离散点的值 $\Psi(nT)$, ($n \in Z$), 因此只能根据函数逼近理论由这些已知的样点值构造出 $h(t)$, 使 $h(t)$ 尽量接近 $\Psi(t)$ 。这里用 δ^2 来度量由于 $h(t)$ 不精确等于 $\Psi(t)$ 所引起的小波变换结果的误差,即令

$$\epsilon^2 = \|h - \Psi\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t) - \Psi(t)|^2 dt \quad (4)$$

$$\delta^2 = \|f * h - f * \Psi\|_2^2$$

由 $L^2(\mathbb{R})$ 中的柯西不等式及内积与卷积的关系可知：

$$\delta^2 = \|f * h - f * \Psi\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \cdot \|h - \Psi\|_2^2 = \epsilon^2 \|f\|_2^2$$

由 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 可知，只要 ϵ^2 足够小，就可保证 δ^2 足够小，也即在均方意义下滤波器的输出 $y(t)$ 与真正的小波变换间的误差足够小。正是由于小波函数优秀的时频局部化特性，使我们能够构造出非常接近 $\Psi(t)$ 的 $h(t)$ 。设 $\Psi(f)$ 代表 $\Psi(t)$ 的富氏变换， $\text{supp}\Psi$ 、 $\text{supp}\Psi$ 分别表示 $\Psi(t)$ 、 $\Psi(f)$ 的支撑集，则近似有 $\text{supp}\Psi = [t_1, t_2]$ ， $\text{supp}\Psi = [f_1, f_2]$ ，其中 t_1, t_2, f_1, f_2 为有限大的数，在 $[t_1, t_2]$ 、 $[f_1, f_2]$ 之外可近似认为 $\Psi(t)$ 、 $\Psi(f)$ 为零，例如墨西哥帽状小波

$\Psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}$ ，其富氏变换 $\Psi(f) = 8f^2 \sqrt{\frac{\pi^5}{2}} e^{-2\pi^2 f^2}$ ；相应的波形分别如图 3(a)、(b) 所示，可以近似认为 $\text{supp}\Psi = [-4, 4]$ ， $\text{supp}\Psi = [-0.75, 0.75]$ 。

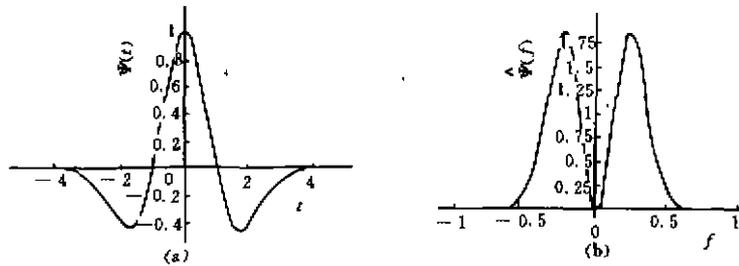


图 3 $\Psi(t)$ 及 $\Psi(f)$ 的波形图

若要使 $h(t) = \Psi(t)$ ，则 $h(t)$ 所代表的系统是一个非因果系统，为了得一个因果系统，可令

$$\Psi_1(t) = \Psi(t - t_0), \text{ 此处 } t_0 = t_1 = 4$$

此时 $\text{supp}\Psi_1 = [0, 8]$ ， $\text{supp}\Psi_1 = [-0.75, 0.75]$ ，若使 $h(t) = \Psi_1(t)$ ，根据卷积的性质，则此时滤波器的输出

$$y(t) = x * h(t) = x * \Psi_1(t) = W_{X_s}(t - t_0) \quad (j = 0, s = 1) \quad (5)$$

即此时的 $y(t)$ 只是信号小波变换 W_{X_s} 延迟 t_0 的结果。

已知 $\Psi_1(t)$ 的 $2N$ 个样点值 $\Psi_1(0), \Psi_1(T), \Psi_1(2T), \dots, \Psi_1((2N-1)T)$ ，令 $h(t)$ 在这 $2N$ 点处与 $\Psi_1(t)$ 相等且记

$$\lambda_j = e^{t_j T} \quad (6)$$

代入式(3) 则有

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(0) &= \sum_{j=1}^N K_j \\ \Psi_1(T) &= \sum_{j=1}^N K_j e^{t_j T} = \sum_{j=1}^N K_j \lambda_j \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(2T) &= \sum_{j=1}^N K_j e^{2\beta_j T} = \sum_{j=1}^N K_j \lambda_j^2 \\ \Psi_1((2N-1)T) &= \sum_{j=1}^N K_j e^{(2N-1)\beta_j T} = \sum_{j=1}^N K_j \lambda_j^{(2N-1)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由文献[3],上述方程可由下述步骤求解:

1) 令 $B = (B_1, B_2, \dots, B_N)'$, $\Psi = (\Psi_1(NT), \Psi_1((N+1)T), \dots, \Psi_1((2N-1)T))'$

$$A = \begin{bmatrix} \Psi_1((N-1)T) & \Psi_1((N-2)T) & \dots & \Psi_1(0) \\ \Psi_1(NT) & \Psi_1((N-1)T) & \dots & \Psi_1(T) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_1((2N-2)T) & \Psi_1((2N-3)T) & \dots & \Psi_1((N-1)T) \end{bmatrix}$$

由方程 $AB = \Psi$ 得 $B = A^{-1}\Psi$, 这里的 A^{-1} 是用的 A 的广义逆矩阵。

2) 求下述特征多项式的零点

$$\lambda^N + B_1 \lambda^{N-1} + B_2 \lambda^{N-2} + \dots + B_N$$

得到 N 个复根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, 并由式(6)得到 $\beta_j = \frac{\log \lambda_j}{T}$, ($j = 1, 2, \dots, N$)。对稳定的系统, 所有 β_j 应具有负的实部, 否则应改变 N 或 T 重新回到步骤 1)。

3) 将 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 代入由式(7)表示的线性方程组中, 采用最小二乘法求得 K_1, K_2, \dots, K_N , 将求得的 K_j 和 λ_j 参数代入式(3)中可得到 $h(t)$ 的指数和式。

4) 由式(4)计算 ϵ^2 , 根据允许的小波变换误差 δ^2 检验 ϵ^2 是否符合要求, 否则改变 N 或 T 并重复上述步骤直到满意为止。

2.2 网络阶数 N 及样点间隔 T 的确定

上面是靠试探法根据要求的误差度量 ϵ 来确定 N 及 T 的。实际上可由小波函数的时频局部化性质推导出它们的取值范围。

2.2.1 T 的确定

由小波函数 $\Psi_1(t)$ 的频域局部化性质知, $\Psi_1(t)$ 可看作带限信号, 当 $f > f_m$ 时 $\Psi_1(f)$ 近似为零。由 Nyquist 抽样定理知, 只有当 T 满足

$$T \leq \frac{1}{2f_m} \quad (8)$$

时才有可能由 $\Psi_1(t)$ 的样点值 $\Psi_1(nT)$ 精确恢复出 $\Psi_1(t)$ 。

2.2.2 N 的确定

要获得 $\Psi_1(t)$, 必须先要得到 $\Psi_1(t)$ 的 $2N$ 个样点值 $\Psi_1(nT)$, ($n = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$)。从信号处理的角度出发, 求 $\Psi_1(t)$ 的 $2N$ 个样点值相当于对 $\Psi_1(t)$ 用窗函数 $u(t)$ 相乘得 $\Psi_1(t)u(t)$, 然后再取样, 其中

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, (2N-1)T] \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

由小波函数在时域的局部化特性知, 存在着有限大的 t_m , 当 $t > t_m$ 时可近似认为 $\Psi_1(t) = 0$, 因此若 $(2N-1)T > t_m$, 也即当

$$N > \frac{t_m}{2T} + \frac{1}{2} \quad (10)$$

时, 有 $\Psi_1(t) = \Psi_1(t)u(t)$, 因此当 N, T 满足(8)、(10)式时根据 $\Psi_1(t)$ 的 $2N$ 个样点值 $\Psi_1(nT)$

能够精确恢复 $\Psi_1(t)$ (忽略计算精度的误差, $\Psi_1(t)$ 在时、频域被截断所造成的混叠效应)。通常小波函数 $\Psi_1(t)$ 按时频局部化特性来划分有以下三类:

- 1 时域为严格紧支集而频域为非严格紧支集(如 Daubechies 小波函数);
- 2 频域为严格紧支集而时域为非严格紧支集(如 Littlewood-Paley 小波函数);
- 3 时、频域均为非严格紧支集(如墨西哥帽状小波函数)。

对第 1、2 类小波函数可以求出 ϵ^2 的下界, 例如当 $\Psi_1(t)$ 为第 1 类小波函数时有 ϵ^2 的下界 ϵ_{\min}^2 的计算式

$$\epsilon_{\min}^2 = \int_{t_m}^{\infty} |\Psi_1(t)|^2 dt + \int_{-\infty_m}^0 |\Psi_1(t)|^2 dt$$

当 $\Psi_1(t)$ 为第 2 类小波函数时由 Parseval 恒等式可以得到 ϵ^2 的下界

$$\epsilon_{\min}^2 = \int_{f_2}^{\infty} |\Psi_1(f)|^2 df + \int_{-\infty_m}^{f_1} |\Psi_1(f)|^2 df$$

它们是由于小波函数在时域区间 $[0, t_m]$ 或频域区间 $[f_1, f_2]$ 外不严格为零引起的; 而当 $\Psi_1(t)$ 为第 3 类小波函数时的情况则较复杂, 这时既有时域截断的影响又有频域混叠效应。

3 实验结果及讨论

在工程应用中允许 $h(t)$ 与实际的 $\Psi_1(t)$ 有一定的误差, 这使我们可用较小的 N , 较大的 T , 也即用较小阶的网络就可获得满意的结果。表 1 给出了按本文 2.1 节的方法求得的 $N=11, T=0.504$ 时(3)式对应的 $h(t)$ 参数 K, β ; 图 4 是图 3(a) 中的墨西哥帽状小

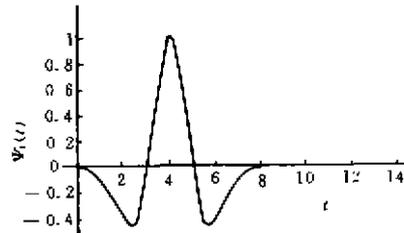


图 4 $\Psi_1(t)$ 的波形图

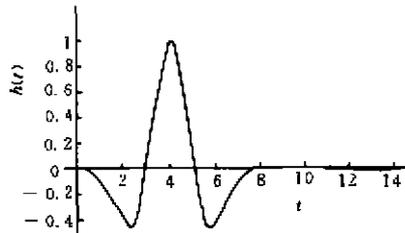


图 5 $h(t)$ 的波形图

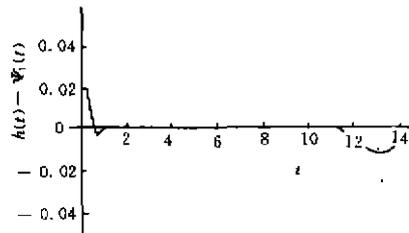


图 6 $h(t) - \Psi_1(t)$ 波形图

波 $\Psi(t)$ 延时 $t_0 = 4$ 后得到的 $\Psi_1(t)$ 的波形, 图 5 是相应 $h(t)$ 的波形, 此时 $\epsilon^2 \approx 0.0003975$; 图 6 是放大的 $h(t) - \Psi_1(t)$ 波形图。图 4 中可近似认为 $t_m = 8, f_m = 0.75$ 因而根据式(8)、(10) 应有 $T \leq \frac{2}{3}, N > 6.5$ 。由于本例中 $\Psi_1(t)$ 在时、频域都不是严格的紧支集, 所以实际的 N 取得较大, 以减小误差。

表1 $N=11$ 时滤波器 $h(t)$ 的参数

J	b_j	K_j
1	$-0.789783 - i4.27371$	$0.009601 + i0.026445$
2	$-0.789783 + i4.27371$	$0.009601 - i0.026445$
3	$-0.751654 - i3.31907 - 0.399622 + i0.183575$	
4	$-0.751654 + i3.31907 - 0.399622 - i0.183575$	
5	$-0.703243 - i2.48745$	$0.170482 - i2.057252$
6	$-0.703243 + i2.48745$	$0.170482 + i2.057252$
7	$-0.636247 - i1.70733$	$2.549143 + i2.69734$
8	$-0.636247 + i1.70733$	$2.549143 - i2.69734$
9	$-0.529806 - i0.940083 - 2.251492 + i0.206804$	
10	$-0.529806 + i0.940083 - 2.251492 - i0.206804$	
11	-0.250669	-0.161256

表2 N 取不同值时的 T_m 及 ϵ^2

	T_m	ϵ^2
$N=9$	0.66	0.0470814
$N=10$	0.55	0.0011426
$N=11$	0.504	0.0003975

实验中发现当 N 固定时, ϵ^2 随 T 的变化并不是单调的, 而是有一个极小点, 采用一维搜索法可找到每个 N 对应的最佳 T_m , 当 $T = T_m$ 时得到最小的 ϵ^2 . 表2分别给出了 $N=9, 10, 11$ 的 T_m, ϵ^2 .

另外, 还可采用以下三种方法进一步改善 $h(t)$ 逼近 $\Psi_1(t)$ 的程度:

- 1) 根据信号处理的理论, 在 N, T 固定后还可以通过改变式(9)中的窗函数 $u(t)$ 的形状来减小 ϵ^2 .
- 2) 对时、频域均为非严格紧支集的小波函数(如墨西哥帽状小波函数), 还可增大 t_0 以减小 ϵ^2 , 只是 t_0 越大, 则由滤波器输出得到的小波变换延时就越大。
- 3) 除利用 $\Psi_1(t)$ 在离散点的样值来构造 $h(t)$ 外, 还可用它在这些点上的导数值来改善逼近的效果。

参 考 文 献

- 1 Xia Xianggen. Wavelet Coefficient computation with Optimal Prefiltering. IEEE Trans on Signal Processing, 1994, 42(8): 2191~2195
- 2 马维祺. 利用子波变换的图象压缩编码技术. 信号处理, 1995, 9(2): 121~129
- 3 (美)小戴维·弗塔特尔著, 电路. 刘胜利译. 南昌: 江西人民出版社, 1980. 382~392

Realizing Continuous Wavelet Transform with linear Analog filter

Tian Fengchun Jin Jicheng

(Communication & Measurement Control Engineering College, Chongqing University)

ABSTRACT A method of realizing wavelet transform with linear analog filter is proposed. It shows another new way of obtaining fast wavelet transform. It has also given out a procedure of constructing such a filter network and verified by the Mexican Hat Wavelet.

KEYWORDS linear networks / continuous wavelet transform; analog filter