

(8) 41-47

# 用 Riesz 基函数表达的多分辨分析模型

吴渝<sup>①\*</sup> 李红波<sup>②</sup> 曹长修<sup>①</sup>

(<sup>①</sup> 重庆大学自动化系, 重庆, 400044; <sup>②</sup> 渝州大学自电系; 第一作者 27 岁, 女, 博士生)

TN911.1

TN713

**摘要** 建立了用 Riesz 基函数表达的多分辨分析模型, 在模型中研究了空间正交性条件与完全重构条件的满足, 得出了包含正交小波分析的更具普遍性的多分辨分析模型。

**关键词** 重建; 基底 / 小波变换; 多分辨分析

中国图书资料分类法分类号 TN713

## 0 引言

Riesz 基函数 . 滤波器

在 Mallat 定义中<sup>[1]</sup>, 多分辨分析的一个重要特性是“Riesz 基存在性”。多分辨分析中的一列闭子空间可通过其中任何一个子空间内的 Riesz 基函数进行伸缩与平移而张成, 因此, 对于整个多分辨分析, Riesz 基函数是十分关键的。

首先, 它决定了多分辨分析函数子空间的类型, 即其中所属信号的类型。如 Riesz 基函数取为理想采样函数  $g(x) = \text{sinc}x = \frac{\sin\pi x}{\pi x}$ , 多分辨分析各级子空间实际上是 Paley-Wiener 空间, 其中信号类型为频谱有限信号。

其次, 多分辨分析中的尺度函数  $\varphi(x)$  及小波函数  $\psi(x)$  均与 Riesz 基函数紧密相关。二者可由 Riesz 基函数按一定方法生成, 如将 Riesz 基函数进行正交化处理得到一组标准正交基<sup>[2]</sup>。

由此可以从 Riesz 基函数着手, 来分析多分辨分析的结构。

## 1 模型描述

整个模型的建立过程如图 1 所示, 在该过程中强调了 Riesz 基函数的作用, 将其作为多分辨分析模型研究的起点。由图 1 可知, 已知  $V_0$  子空间的 Riesz 基函数  $r(x)$ , 只要找到  $W_0$  子空间内的一个 Riesz 基函数  $r_w(x)$ , 使得  $w_0 \oplus w_0 = v_{-1}$ , 则多分辨分析的“空间正交性”条件满足, 如果还满足完全重构性条件, 则任意信号  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  可在该多分辨分析塔分解并重构而不丢失任何信息。但尺度函数  $\varphi(x)$  与小波函数  $\psi(x)$  分别用上述的  $r(x)$  与  $r_w(x)$  进行构造, 它们不一定组成  $v_0$  与  $w_0$  内的标准正交基, 这与算子  $p, q$  的选取有关。

而图 1 中的可逆稳定算子中,  $q$  是来源于如下的命题。

**命题 1** 函数  $r(x) \in v_0$ , 其平移系  $\{r(x-k) | k \in \mathbb{Z}\}$  组成  $v_0$  的一组基底, 且  $r^{-1}(k)$  存在,

\* 收文日期 1996-12-06

\*\* 现在重庆邮电学院工作

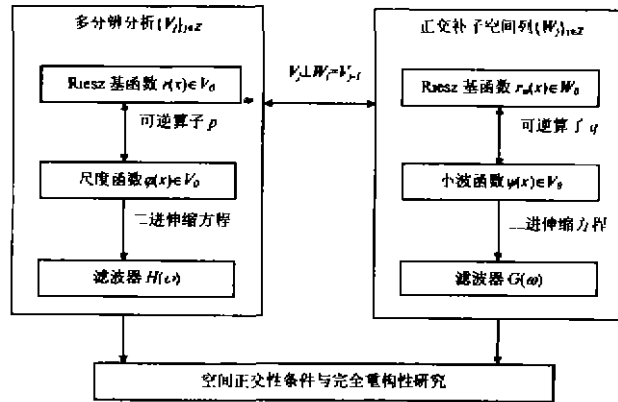


图 1 用 Riesz 基函数表达的多分辨分析建立示意图

只要  $p$  是一个可逆卷积算子, 则 
$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(k)r(x-k) \tag{1}$$

的平移系  $\{g(x-k) | k \in \mathbb{Z}\}$  也组成  $v_0$  的一组基底。

命题 1 中  $r^{-1}(k)$  是指函数  $r(x)$  的采样序列  $r(k)$  的反卷积序列,  $r^{-1}(k)$  存在是指其满足稳定性条件, 算子  $p$  也可当作滤波器,  $p$  可逆亦是指  $p^{-1}(k)$  存在。本命题是 M. Unser 在文 [3] 中给出的命题的推广, 其结论仅针对  $n$  阶 B 样条函数。有了此定理, 则空间  $v_0$  内的一个基底可通过一个可逆卷积算子引出另一个基底, 即  $r(x)$  亦可表示为

$$r(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p^{-1}(k)g(x-k) \tag{2}$$

在多分辨分析中, 若取  $r(x)$  为  $v_0$  中的 Riesz 函数,  $g(x)$  为尺度函数  $\varphi(x)$ , 则尺度函数可由 Riesz 基函数构造。但根据小波分析理论, 此时  $\varphi(x)$  也应是一组 Riesz 基, 即满足 Riesz 基稳定条件 (更为普遍的情况是框架条件)。可得到命题 2 如下。

命题 2 在多分辨分析中, 取命题 1 中的  $r(x)$  为张成  $v_0$  的 Riesz 基函数, 则算子  $p$  若满足稳定性条件 
$$c \leq |p(z)|^2 \leq D \tag{3}$$

其中  $C, D$  为正常数,  $0 < C \leq D < \infty$ , 则 (1) 式得到的  $g(x)$  的平移系  $\{g(x-k) | k \in \mathbb{Z}\}$  组成  $v_0$  的一个 Riesz 基。

此命题的证明利用卷积定理与 Riesz 基稳定性可直接得出。因此, 只要  $p, q$  满足可逆稳定条件,  $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$  的构造方式是很多的, 可以仅用 Riesz 基来表达整个多分辨分析的模型。

下面定义分析中的三个关键算子:

1° 算子  $p$ : 为可逆稳定卷积算子, 作用是由  $v_0$  上的 Riesz 基函数生成尺度函数  $\varphi(x)$ 。

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(k)r(x-k) \tag{4}$$

2° 算子  $q$ : 为可逆稳定卷积算子, 作用是由  $u_0$  的 Riesz 基函数生成小波函数  $\psi(x)$ 。

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q(k)r_w(x-k) \tag{5}$$

3° 算子  $d$ : 由  $v_{-1}$  上的 Riesz 基函数生成  $u_0$  上的 Riesz 基函数  $r_w(x)$ 。

$$r_w(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k)r(2x-k) \tag{6}$$

显然算子  $d$  必须满足一定条件, 这将在下文研究。再定义函数  $r(x)$  的自相关序列以  $c_r(k)$  表示, 即 
$$c_r(k) = \langle r(x), r(x-k) \rangle \tag{7}$$

上式变换到频域为  $C_r(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |R(\omega + 2k\pi)|^2 \in L^2(0, 2\pi)$  (8)

则 Riesz 基稳定性条件可用其自相关序列来表达, 即为

$$A \leq C_r(\omega) \leq B \quad 0 < A \leq B < \infty \quad (9)$$

## 2 空间正交性条件

由(4)~(6)式变换到频域即为

$$\hat{\varphi}(\omega) = P(\omega)R(\omega) \quad (10)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = Q(\omega)R_\omega(\omega) \quad (11)$$

$$R_\omega(\omega) = D(\omega)R(\omega) \quad (12)$$

其中特别定义  $D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k)e^{-j\omega k}$ , 而  $P(\omega)$ 、 $Q(\omega)$  分别是  $p(k)$ 、 $q(k)$  的傅氏变换, 再利用二进制伸缩方程

$$\hat{\varphi}(2\omega) = H(\omega) \cdot \hat{\varphi}(\omega) \quad (13)$$

$$\hat{\psi}(2\omega) = G(\omega) \cdot \hat{\psi}(\omega) \quad (14)$$

其中  $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$  的定义与  $D(\omega)$  的定义一致, 可进一步表达滤波器  $H(\omega)$  与  $G(\omega)$ , 即

$$H(\omega) = \frac{P(2\omega)}{P(\omega)} H_r(\omega) \quad (15)$$

其中

$$H_r(\omega) = \frac{R(2\omega)}{R(\omega)} \quad (16)$$

$$G(\omega) = \frac{Q(2\omega) \cdot D(\omega)}{P(\omega)} \quad (17)$$

$H(\omega)$  与  $G(\omega)$  可写为  $z$  变换形式, 即

$$H(z) = \frac{P(z^2)}{P(z)} H_r(z) \quad (18)$$

$$G(z) = \frac{Q(z^2)}{P(z)} D(z) \quad (19)$$

可证明如下定理的结论:

### 定理 1

$$1) \quad |H_r(z)|^2 C_r(z) + |H_r(-z)|^2 C_r(-z) = C_r(z^2) \quad (20)$$

$$2) \quad |H(z)|^2 C_p(z) + |H(-z)|^2 C_p(-z) = C_p(z^2) \quad (21)$$

$$3) \quad |G(z)|^2 C_p(z) + |G(-z)|^2 C_p(-z) = C_p(z^2) \quad (22)$$

$$4) \quad |D(z)|^2 C_r(z) + |D(-z)|^2 C_r(-z) = C_{rw}(z^2) \quad (23)$$

上面  $n$  个恒等式的证明方法一样, 即利用(8)式对自相关序列的定义式, 将二进制伸缩方程代入, 再分奇偶求和即得结论, 或利用

$$C_p(z) = |p(z)|^2 C_r(z) \quad (24)$$

$$C_p(z) = |Q(z)|^2 C_{rw}(z) \quad (25)$$

下面考察小波函数  $\psi(x) \in \mathcal{W}_b$  的充要条件, 以寻找算子  $d$  的构造途径. 对于前者, 有定理 2 如下:

定理 2  $\Psi(x) \in \mathcal{W}_b$  的充要条件是

$$H(z)G(z^{-1})C_p(z) + H(-z)G(-z^{-1})C_p(-z) = 0 \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
\text{证明} \quad I &= \langle \varphi(x-k), \psi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-k) \overline{\psi(x)} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\omega) e^{-i\omega k} \overline{\hat{\psi}(\omega)} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 e^{-i\omega k} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} H\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \overline{G\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 e^{-i\omega k} d\omega
\end{aligned}$$

上式分奇偶两项求和, 利用  $H(\omega)$  与  $G(\omega)$  的周期性及  $\varphi(x)$  的自相关序列  $c_{\varphi}(k)$ , 有

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ H\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)} C_{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) + H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \overline{G\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} C_{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right] e^{-i\omega k} d\omega$$

$$\text{当且仅当} \quad H\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)} C_{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) + H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \overline{G\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} C_{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) = 0 \quad (27)$$

有  $\langle \varphi(x-k), \psi(x) \rangle = 0$

即  $\psi(x) \in \omega_0$

(27) 式写为  $z$  变换表达式即(26) 式, 即证。

由定理 2 的结论, 可进一步得到定理 3, 即关于  $r_w(x)$  的构造及  $d$  算子的选取:

定理 3  $r_w(x) \in \omega_0$  的充要条件是

$$H_r(z)C_r(z)D(z^{-1}) + H_r(-z)C_r(-z)D(-z^{-1}) = 0 \quad (28)$$

$r_w(x)$  构成 Riesz 基的充要条件是

$$C \leq |D(z)|^2 \leq D \quad (0 < C \leq D < \infty, C, D \text{ 是正常数}) \quad (29)$$

上述两个条件是函数系  $\{r_w(x-k) | k \in \mathbb{Z}\}$  构成  $\omega_0$  一组 Riesz 基的充要条件。

证明 将(18)、(19)、(24) 式代入(26) 式, 即

$$\begin{aligned}
&\frac{P(z^2)}{P(z)} H_r(z) \frac{Q(z^{-2})D(z^{-1})}{P(z^{-1})} |P(z)|^2 C_r(z) \\
&+ \frac{P(z^2)}{P(-z)} H_r(-z) \frac{Q(z^{-2})D(-z^{-1})}{P(-z^{-1})} |P(-z)|^2 C_r(-z) = 0
\end{aligned}$$

利用  $|P(z)|^2 = P(z)P(z^{-1})$  整理上式, 有

$$P(z^2)Q(z^{-2})[H_r(z)C_r(z)D(z^{-1}) + H_r(-z)C_r(-z)D(-z^{-1})] = 0$$

即  $H_r(z)C_r(z)D(z^{-1}) + H_r(-z)C_r(-z)D(-z^{-1}) = 0$

即(28) 式结论, 只要  $d$  算子满足(28) 式,  $r_w(x)$  便在  $\omega_0$  上。下面考虑  $r_w(x)$  是否满足 Riesz 基稳定性条件, 根据(9) 式, 即要求  $A \leq C_w(z) \leq B$  (30)

而由定理 1 中的(23) 式, 该条件等价于  $C \leq |D(z)|^2 \leq D$

即  $r_w(x)$  此时构成  $\omega_0$  上的一组 Riesz 基。

满足定理 3 的算子  $d$  的取法不只一种, 笔者给出一种取法, 即

$$D(z) = -z^{-1}H_r(-z^{-1})C_r(-z^{-1}) \quad (31)$$

可验证  $D(z)$  满足定理 3 的条件 1, 而将  $D(z)$  代入(23) 式, 可推导出

$$C_w(z^2) = C_r(z)C_r(-z)C_r(z^{-2}) \quad (32)$$

由于(32) 式中  $C_r(z)$  满足 Riesz 基稳定条件, 因此定理 3 的条件 2) 亦满足, 即此时  $r_w(x)$

组成  $w_0$  中的一组 Riesz 基。

### 3 Mallat 算法

用 Mallat 算法的思想,可推出前面定义的模型对应的 Mallat 算法。这里直接给出一维 Mallat 算法的卷积表示,推导过程略。

#### 3.1 分解算法

$$C_{j+1} = C_\varphi^{-1} \times [h * C_\varphi * C_j]_{\downarrow 2} \tag{33}$$

$$D_{j+1} = C_\psi^{-1} \times [\bar{g} * C_\varphi * C_j]_{\downarrow 2} \tag{34}$$

#### 3.2 重构算法

$$C_j = [C_{j+1}]_{\uparrow 2} * h + [D_{j+1}]_{\uparrow 2} * g \tag{35}$$

其中  $[\ ]_{\downarrow 2}$  与  $[\ ]_{\uparrow 2}$  分别表示向下采样与向上采样过程。各算子定义与文[2]一致,而  $C_\varphi, C_\psi$  为自相关序列表示。由(33)~(35)式,可画出最简单的一级分解的系统框图(图 2)。上面算法是用尺度函数与小波函数表示的,亦可采用 Riesz 基函数与  $d$  算子表示,即

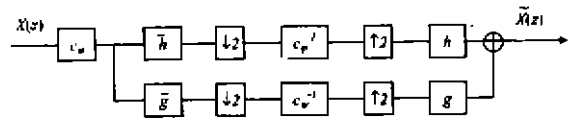


图 2 一级分解与重构系统框图

$$C_{j+1} = C_r^{-1} * [h * C_r * C_j]_{\downarrow 2} \tag{36}$$

$$D_{j+1} = C_w^{-1} * [\bar{d} * C_r * C_j]_{\downarrow 2} \tag{37}$$

$$C_j = [C_{j+1}]_{\uparrow 2} * h_r + [D_{j+1}]_{\uparrow 2} * d \tag{38}$$

同理,也可推出二维 Mallat 算法,以用于图象的分析与处理,对于可分离情况,二维算法是一维算法的忠实翻版,即对二维信号按行按列分别进行一维的处理,这里就不再给出相应的结论了。

### 4 完全重构条件

考查用 Riesz 基表达的多分辨分析塔,有定理如下:

定理 4

$$1) \quad |H(z)|^2 \frac{1}{C_\varphi(z^2)} + |G(z)|^2 \frac{1}{C_\varphi(z^2)} = \frac{1}{C_\varphi(z)} \tag{39}$$

$$2) \quad H(z)H(-z^{-1}) \frac{1}{C_\varphi(z^2)} + G(z)G(-z^{-1}) \frac{1}{C_\psi(z^2)} = 0 \tag{40}$$

$$3) \quad |H_r(z)|^2 \frac{1}{C_r(z^2)} + |D(z)|^2 \frac{1}{C_w(z^2)} = \frac{1}{C_r(z)} \tag{41}$$

$$4) \quad H_r(z)H_r(-z^{-1}) \frac{1}{C_r(z^2)} + D(z)D(-z^{-1}) \frac{1}{C_w(z^2)} = 0 \tag{42}$$

证明 1):令  $M(z) = |H(z)|^2 \frac{1}{C_\varphi(z^2)} + |G(z)|^2 \frac{1}{C_\varphi(z^2)}$ ,代入  $C_\varphi(z^2)$  的表达式,即(22)式,得

$$M(z) = |H(z)|^2 \frac{1}{C_\varphi(z^2)} + \frac{|G(z)|^2}{|G(z)|^2 C_\varphi(z) + |G(-z)|^2 C_\varphi(-z)}$$

又由定理 2 的(26)式,有

$$|H(z)|^2 |G(z)|^2 |C_\varphi(z)|^2 = |H(-z)|^2 |G(-z)|^2 |C_\varphi(-z)|^2$$

代入  $M(z)$  替换  $|G(-z)|^2$ , 并消去  $|G(z)|^2$ , 有

$$M(z) = |H(z)|^2 \frac{1}{C_p(z^2)} + \frac{1}{C_p(z) + \frac{|H(z)|^2 |C_p(z)|^2}{|H(-z)|^2 |C_p(-z)|^2} C_p(-z)}$$

又利用  $|C_p(z)|^2 = C_p(z)C_p(z^{-1}) = (C_p(z))^2$

$M(z)$  可再推出

$$\begin{aligned} M(z) &= |H(z)|^2 \frac{1}{C_p(z^2)} \\ &\quad + \frac{|H(-z)|^2 |C_p(-z)|^2}{|H(z)|^2 |C_p(z)|^2 C_p(-z) |H(-z)|^2 |C_p(-z)|^2 C_p(z)} \\ &= |H(z)|^2 \frac{1}{C_p(z^2)} + \frac{|H(-z)|^2 |C_p(-z)|^2}{[|H(z)|^2 C_p(z) + |H(-z)|^2 C_p(-z)] \cdot C_p(z)} \end{aligned}$$

代入(21)式, 即

$$\begin{aligned} M(z) &= |H(z)|^2 \frac{1}{C_p(z^2)} + |H(-z)|^2 \frac{C_p(-z)}{C_p(z)} \frac{1}{C_p(z^2)} \\ &= \frac{1}{C_p(z^2)} (|H(z)|^2 C_p(z) + |H(-z)|^2 C_p(-z)) \frac{1}{C_p(z)} \\ &= \frac{1}{C_p(z)} \end{aligned}$$

即证得(39)式。

证明 2): 要证明(40)式, 等效于证明

$$H(z)H(-z^{-1})C_p(z^2) + G(z)G(-z^{-1})C_p(z^2) = 0 \quad (43)$$

将  $C_p(z^2)$ 、 $C_p(z^2)$  的公式(21)、(22)代入, 得

$$\begin{aligned} &H(z)H(-z^{-1})[|G(z)|^2 C_p(z) + |G(-z)|^2 C_p(-z)] \\ &\quad + G(z)G(-z^{-1})[|H(z)|^2 C_p(z) + |H(-z)|^2 C_p(-z)] = 0 \end{aligned}$$

利用  $|G(z)|^2 = G(z) \cdot G(z^{-1})$ , 将上式第 1 项与第 4 项合并, 2, 3 项合并, 即

$$\begin{aligned} &H(-z^{-1})G(z)[H(z)G(z^{-1})C_p(z) + H(-z)G(-z^{-1})C_p(-z)] \\ &\quad + H(z)G(-z^{-1})[H(-z^{-1})G(z)C_p(-z) + H(z^{-1})G(z)C_p(z)] = 0 \end{aligned}$$

利用定理 2(26 式), 上式成立, 即定理 4 的(40)式得证, (41)与(42)的证明与前两式完全一样, 或直接令上两式中  $p = q = 1$  即得。

定理 4 是分析系统重构性质的基础, 笔者对图 2 所示的一级分解的重构特性进行讨论, 该系统的输入输出关系为

$$\bar{X}(z) = \frac{1}{2} C_p(z) [H(z) \ G(z)] \begin{bmatrix} 1 \\ C_p(z^2) \\ 1 \\ C_p(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(z^{-1}) & H(-z^{-1}) \\ G(z^{-1}) & G(-z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix} \quad (44)$$

由于向下采样环节的影响, 系统输出中出现了  $X(-z)$  的混叠形式, 而系统完全重构性要求

$$\bar{X}(z) = X(z)$$

下面考察系统的重构性。(44)式可进一步表示为

$$\bar{X}(z) = \left[ (H(z))^2 \frac{C_p(z)}{C_p(z^2)} + |G(z)|^2 \frac{C_p(z)}{C_p(z^2)} \right] X(z)$$

$$H(z)H(-z^{-1}) \frac{C_p(z)}{C_p(z^2)} + G(z)G(-z^{-1}) \frac{C_q(z)}{C_q(z^2)} \cdot \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}$$

根据定理 4 的结论, 上式即为  $\tilde{X}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix} = X(z)$

即系统的完全重构的, 向下采样过程去掉的信息并未影响到系统的完全重构性。而任意深度的分解, 均是图 2 所示一级分解的嵌套, 因此笔者所建立的多分辨分析模型是完全重构的。

### 5 结 论

笔者所建立的用 Riesz 基函数表达的多分辨分析模型, 实际上是一种普遍化的模型。由定理 3 知, 空间正交性条件仅与  $d$  算子有关, 与  $p, q$  算子无关, 因此在模型中,  $p, q$  算子只要满足可逆稳定条件, 具有很大的自由度与可选择性, 如  $p, q$  同时选为  $r(z)$  与  $r_w(x)$  的正交化算子, 则  $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$  分别构成  $v_0$  与  $w_0$  内的标准正交基。

以  $p$  为例, 四种等价形式如图 3 所示。

综上所述, 本文结论具有普遍性意义, 不同应用场合可选择不同的滤波器  $H(w)$  与  $G(w)$ , 这是通过选择 Riesz 基函数  $r(x)$  与  $p, q$  算子来实现的。Daubechies 的最小支集正交小波基的设计是通过设计滤波器  $H(z)$  进行的, 这等效于本模型中对 Riesz 基函数  $r(x)$  的构造。

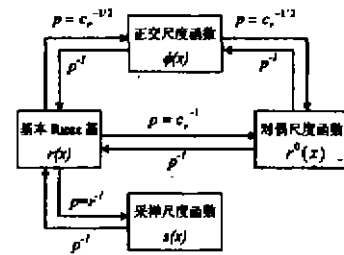


图 3 四种等价的尺度函数

### 参 考 文 献

- 1 Mallat G. A theory for multiresolution signal decomposition, the wavelet representation. IEEE Trans Patt Anal Mach Intel, 1989, 11(7), 674~693
- 2 刘贵忠, 邱双亮. 小波分析及其应用. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1992: 17~36
- 3 Unser M, Aldroubi A, Eden M. The  $L_2$  polynomial spline pyramid. IEEE Trans Patt Anal Mach Intell, 1993, 15(4): 364~379

## Multiresolution Model Expressed by Riesz Base Functions

Wu Yu Li Hongbo Cao Changxiu

(Department of Automation, Chongqing University)

**ABSTRACT** The Riesz base functions are the bases of multiresolution pyramid defined by Mallat. We use them to build the model of multiresolution analysis. We also study the space orthogonality condition and the perfect reconstruction condition. This model is a general multiresolution model which includes the orthogonal wavelet analysis as its special model.

**KEYWORDS** reconstruction; bases / wavelet transform; multiresolution analysis