1998 年 9 月　　重庆大学学报（自然科学版）　　Vol. 21, №. 5
第 21 卷第 5 期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Sep. 1998

·研究简报·

$S_3^1(\triangle)$表示的B样条*

林　意　　廖林灿
（重庆大学汽车摩托车工程技术中心，重庆，400044；第一作者 36 岁，男，讲师，博士）

摘　要　运用三角剖分的协调条件，分析了$S_3^1(\triangle)$中B样条支撑集问题，获得一般三角剖分下B样条支撑集的存在条件。作为特例，得(Ⅰ)型、(Ⅱ)型三角剖分的B样条支撑集。

关键词　三角剖分；样条空间；B样条
中国图书资料分类法分类号　O174.41

0　引　言

一元样条函数的B样条，以其支撑集小，具有保凸性，可加性等优点，在计算机辅助设计领域受到重视，在样条有限元中也受到广泛应用[2]。对于二维样条有限元或二维样条函数来说，一般采用一维样条函数内积而得，相应地二维B样条也由一维B样条内积而得，如双三次B样条等。这种方法获得的二维样条，保留了一维B样条的优点，如保凸性、可加性、非负性等[1]，因此有广泛的应用。遗憾的是，一维B样条内积方式得的B样条，要求剖分为网格形式，这样，对一般三角剖分便不适用了。于是人们着手研究三角剖分下的B样条，得到了(Ⅰ)型三角剖分下B样条的支撑集和B样条的表达式，同时也证明了(Ⅰ)型三角剖分下，二元三次B样条支集为如图1所示，笔者对于一般的二元三次B样条支撑集形式以及(Ⅱ)型B样条支撑集形式进行了研究。为后续研究三角剖分下B样条性质作了准备。

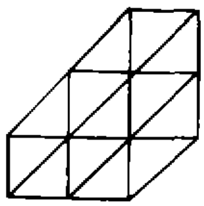

图 1　二元三次 B 样条支撑集

1　基本概念

设Ω为平面单连通区域，$\triangle = \{T_i\}_{i=1}^r$为$\Omega$的三角剖分，对于$0 \leqslant \mu \leqslant k-1$，定义二元样条空间如下：

$$S_k^\mu(\triangle) = \{s \in c^\mu(\Omega), s|_{T_i} \in H_k, i = 1,2,\cdots,r\}$$

其中，H_k表示二元k次多项式空间。

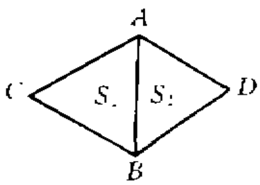

图 2　s_1与s_2在直线AB上光滑拼接

图2所示，在$\triangle ABC$上有二元多项式$s_1(x,y)$，在$\triangle ABD$上有二元多项式s_2，若s_1与s_2在AB上n次光滑，则称s_1与s_2在AB上n次光滑拼接，当$n=1$时，简称为光滑拼接。于是s_1与s_2在AB上光滑拼接的充要条件是[3]：存在c_1、c_2、c_3使

* 收文日期　1998-02-27
受工程物理研究院院外基金资助

得： $s_1 - s_2 = l_{AB}^2(c_1 + c_2x + c_3y)$

其中，l_{AB} 为直线 AB 的方程。

2 $S_3^1(\triangle)$ 中 B 样条支撑集

定理1 $\triangle ABC$ 上有一块三次样条函数 $s(x,y)$ 表示的曲面，若 $s(x,y)$ 在 AB、AC 上与 0 光滑拼接，则 $s(x,y) = 0$.

证明：因在 AB 上，$s(x,y)$ 与 0 光滑拼接，所以

$$s(x,y) = l_{AB}^2(c_{11} + c_{12}x + c_{13}y) \qquad (x,y) \in \triangle ABC$$

又因在 AC 上，$s(x,y)$ 与 0 光滑拼接，所以

$$s(x,y) = l_{AC}^2(c_{21} + c_{22}x + c_{23}y) \qquad (x,y) \in \triangle ABC$$

于是 $$s(x,y) = l_{AB}^2(c_{11} + c_{12}x + c_{13}y) = l_{AC}^2(c_{21} + c_{22}x + c_{23}y)$$

而 $$l_{AB} = (y - y_A) + \alpha_B(x - x_A)$$

$$l_{AC} = (y - y_A) + \alpha_C(x - x_A)$$

其中 (x_A, y_A) 是 A 点坐标，$-\alpha_B$ 是直线 AB 斜率，$-\alpha_C$ 是直线 AC 斜率，为了讨论方便，不妨令 (x_A, y_A) 为原点。于是有：

$$c_{11} + c_{12}x_C + c_{13}y_C = 0$$

$$c_{21} + c_{22}x_B + c_{23}y_B = 0$$

及 $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2\alpha_A & 1 & 2\alpha_B \\ 2\alpha_A & \alpha_A^2 & 2\alpha_B & \alpha_B^2 \\ \alpha_A^2 & 0 & \alpha_B^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{pmatrix} = 0$$

故 $$c_{12} = c_{13} = c_{22} = c_{23} = 0$$

即 $$s(x,y) \equiv 0 \qquad (x,y) \in \triangle ABC$$

证毕

因此，可以看到在 $S_3^1(\triangle)$ 的 B 样条，不允许三角剖分有“屋顶”。也就是说，B 样条三角剖分支撑集必须是标准三角剖分。

定理2 设样条函数 $s(x,y)$ 在 $\triangle OP_iP_{i+1}$ 为 $s_i(x,y)$，并且在直线 P_iP_{i+1} 上与 0 光滑拼接，$i = 1,2,\cdots,n$，若 $n \geqslant 4$，则 $s_i(x,y) \equiv 0$，$(x,y) \in \triangle OP_iP_{i+1}$，若 $n \leqslant 3$，则在 $\triangle OP_iP_{i+1}$ 上存在非零的 $s_i(x,y)$，见图 3.

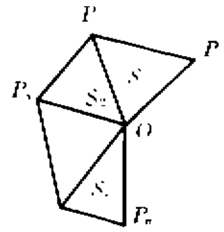

图 3 s_i 在 P_iP_{i+1} 上与 0 的光滑拼接

证明：因为 s_1 与 0 在 P_1P_2 上光滑拼接，所以

$$s_1 = l_{P_1P_2}^2[c_{11} + c_{12}(x - x_2) + c_{13}(y - y_2)]$$

这时，(x_i, y_i) 为 $P_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 坐标。

又因为 s_2 与 0 在 P_3P_2 上光滑拼接，所以

$$s_2 = l_{P_2P_3}^2[c_{21} + c_{22}(x - x_3) + c_{23}(y - y_3)]$$

同理 $$s_3 = l_{P_4P_3}^2[c_{31} + c_{32}(x - x_3) + c_{33}(y - y_3)]$$

$$s_4 = l_{P_5P_4}^2[c_{41} + c_{42}(x - x_4) + c_{43}(y - y_4)]$$

其中，$l_{P_iP_{i+1}}$ 为直线 P_iP_{i+1} 方程，于是

$$l_{P_2P_1}=(y-y_2)+\alpha_1(x-x_2)$$
$$l_{P_3P_2}=(y-y_3)+\alpha_2(x-x_3)=(y-y_2)+\alpha_2(x-x_2)$$
$$l_{P_4P_3}=(y-y_4)+\alpha_3(x-x_3)=(y-y_3)+\alpha_4(x-x_3)$$
$$l_{P_5P_4}=(y-y_5)+\alpha_4(x-x_4)=(y-y_4)+\alpha_4(x-x_4)$$

这里　$\alpha_2=-\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2};\alpha_3=-\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3};\alpha_4=-\dfrac{y_5-y_4}{x_5-x_4};\alpha_1=-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$;另一方面因为$s_2$与$s_1$在$OP_2$上光滑拼接，所以

$$s_2=s_1+l^2_{OP_2}[b_{21}+b_{22}(x-x_2)+b_{23}(y-y_2)]$$

同理
$$s_3=s_2+l^2_{OP_3}[b_{31}+b_{32}(x-x_3)+b_{33}(y-y_3)]$$
$$s_4=s_3+l^2_{OP_4}[b_{41}+b_{42}(x-x_4)+b_{43}(y-y_4)]$$

而　$l_{OP_2}=(y-y_2)+\beta_2(x-x_2)$;　　$-\beta_2$为OP_2斜率

$l_{OP_3}=(y-y_3)+\beta_3(x-x_3)$;　　$-\beta_3$为OP_3斜率

$l_{OP_4}=(y-y_4)+\beta_4(x-x_4)$;　　$-\beta_4$为OP_4斜率

于是

$$l^2_{P_2P_3}[c_{21}+c_{22}(x-x_3)+c_{23}(y-y_3)]$$
$$=l^2_{P_1P_2}[c_{11}+c_{12}(x-x_2)+c_{13}(y-y_3)]+l^2_{OP_2}[b_{21}+b_{22}(x-x_2)+b_{23}(y-y_3)]$$
$$l^2_{P_3P_4}[c_{31}+c_{32}(x-x_4)+c_{33}(y-y_4)]$$
$$=l^2_{P_2P_3}[c_{21}+c_{22}(x-x_3)+c_{23}(y-y_3)]+l^2_{OP_3}[b_{31}+b_{32}(x-x_3)+b_{33}(y-y_3)]$$

及
$$l^2_{P_4P_5}[c_{41}+c_{42}(x-x_5)+c_{43}(y-y_5)]$$
$$=l^2_{P_4P_3}[c_{31}+c_{32}(x-x_4)+c_{33}(y-y_4)]+l^2_{OP_4}[b_{41}+b_{42}(x-x_4)+b_{43}(y-y_4)]$$

展开以上方程，便得：
$$c_{21}+(x_2-x_3)c_{22}+(y_2-y_3)c_{23}=0$$
$$c_{11}+b_{21}=0$$

以及

$$\begin{pmatrix}0&1&0&-1&0&1\\1&2\alpha_1&-1&-2\alpha_2&1&2\beta_2\\2\alpha_1&\alpha_1^2&-2\alpha_2&-\alpha_2^2&2\beta_2&\beta_2^2\\\alpha_1^2&0&-\alpha_2^2&0&\beta_2^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{12}\\c_{13}\\c_{22}\\c_{23}\\b_{22}\\b_{23}\end{pmatrix}=0$$

$$c_{31}+(x_3-x_4)c_{32}+(y_3-y_4)c_{33}=0$$
$$c_{21}=b_{31}=0$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&-1&0&1\\1&2\alpha_2&-1&-2\alpha_3&1&2\beta_3\\2\alpha_2&\alpha_2^2&-2\alpha_3&-\alpha_3^2&2\beta_3&\beta_3^2\\\alpha_2^2&0&-\alpha_3^2&0&\beta_3^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{22}\\c_{23}\\c_{32}\\c_{33}\\b_{32}\\b_{33}\end{pmatrix}=0$$

$$c_{41}+(x_4-x_5)c_{42}+(y_4-y_5)c_{43}=0$$

$$c_{31}=b_{41}=0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2\alpha_3 & -1 & -2\alpha_4 & 1 & 2\beta_4 \\ 2\alpha_3 & \alpha_3^2 & -2\alpha_4 & -\alpha_4^2 & 2\beta_4 & \beta_4^2 \\ \alpha_3^2 & 0 & -\alpha_4^2 & 0 & \beta_4^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{32} \\ c_{33} \\ c_{42} \\ c_{43} \\ b_{42} \\ b_{43} \end{pmatrix}=0$$

综合起来，便有

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & 1 & 0 & -1 & & & & & & 0 & 1 & & & & \\
1 & 2\alpha_1 & -1 & -2\alpha_2 & & & & & & 1 & 2\beta_2 & & & & \\
2\alpha_1 & \alpha_1^2 & -2\alpha_2 & -\alpha_2^2 & & & & & & 2\beta_2 & \beta_2^2 & & & & \\
\alpha_1^2 & 0 & -\alpha_2^2 & 0 & & & & & & \beta_2^2 & 0 & & & & \\
 & & 1 & -\alpha_2 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & 0 & 1 & 0 & -1 & & & & & & 0 & 1 & & \\
 & & 1 & 2\alpha_2 & -1 & -2\alpha_3 & & & & & & 1 & 2\beta_3 & & \\
 & & 2\alpha_2 & \alpha_2^2 & -2\alpha_3 & -\alpha_3^2 & & & & & & 2\beta_3 & \beta_3^2 & & \\
 & & \alpha_2^2 & 0 & -\alpha_3^2 & 0 & & & & & & \beta_3^2 & 0 & & \\
 & & & & 1 & -\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & 1 & 2\alpha_3 & 0 & -1 & -2\alpha_4 & & & & & 1 & 2\beta_4 \\
 & & & & 2\alpha_3 & \alpha_3^2 & 0 & -2\alpha_4 & -\alpha_4^2 & & & & & 2\beta_4 & \beta_4^2 \\
 & & & & \alpha_3^2 & 0 & 0 & -\alpha_4^2 & 0 & & & & & \beta_4^2 & 0 \\
 & & & & & & \frac{1}{x_4-x_5} & 1 & \alpha_3 & & & & & 0 & 0
\end{array}\right)\vec{C}$$

$$=0 \tag{1}$$

其中

$$\vec{C}=(c_{12},c_{13},c_{22},c_{23},c_{32},c_{33},c_{41},c_{42},c_{43},b_{22},b_{23},b_{33},b_{42},b_{43})^{\mathrm{T}}$$

于是方程组有无零解，主要看行列式 A 的值是否为 0，而

$$A=\left|\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & 1 & 0 & -1 & & & & & & 0 & 1 & & & \\
1 & 2\alpha_1 & -1 & -2\alpha_2 & & & & & & 1 & 2\beta_2 & & & \\
2\alpha_1 & \alpha_1^2 & -2\alpha_2 & -\alpha_2^2 & & & & & & 2\beta_2 & \beta_2^2 & & & \\
\alpha_1^2 & 0 & -\alpha_2^2 & 0 & & & & & & \beta_2^2 & 0 & & & \\
 & & 1 & -\alpha_2 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 0 & 1 & 0 & -1 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 2\alpha_2 & -1 & -2\alpha_3 & & & & 0 & 0 & 1 & 2\beta_3 & \\
 & & 2\alpha_2 & \alpha_2^2 & -2\alpha_3 & -\alpha_3^2 & & & & 0 & - & 2\beta_3 & \beta_3^2 & \\
 & & \alpha_2^2 & 0 & -\alpha_3^2 & 0 & & & & 0 & 0 & \beta_3^2 & 0 & \\
 & & & & 1 & -\alpha_3 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & & & 1 & 2\alpha_3 & -1 & -2\alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\beta_4 \\
 & & & & 2\alpha_3 & \alpha_3^2 & -2\alpha_4 & -\alpha_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta_4 & \beta_4^2 \\
 & & & & \alpha_3^2 & 0 & -\alpha_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4^2 & 0
\end{array}\right|$$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3\alpha_2 & -3\alpha_3 & 1 & 2\beta_3 \\ 3\alpha_2^2 & -3\alpha_3^2 & 2\beta_3 & \beta_3^2 \\ \alpha_2^3 & -\alpha_3^3 & \beta_3^2 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2\alpha_1 & 1 & 2\beta_2 \\ 2\alpha_1 & \alpha_1^2 & 2\beta_2 & \beta_2^2 \\ \alpha_1^2 & 0 & \beta_2^2 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2\alpha_4 & 1 & 2\beta_4 \\ -2\alpha_4 & -\alpha_4^2 & 2\beta_4 & \beta_4^2 \\ -\alpha_4^2 & 0 & \beta_4^2 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
=(\alpha_1-\beta_2)^4(\alpha_2-\beta_4)^4\cdot 3(\alpha_2-\beta_3)^2(\alpha_3-\beta_3)^2(\alpha_3-\beta_2)
$$

注意到 α_1 和 β_2，α_4 和 β_4，α_2 和 β_3，α_3 和 β_3，α_3 和 α_3 均为三角形二边的斜率乘负号，故 $A\neq 0$，即 $n=4$ 时，$s_i(x,y)\equiv 0,(x,y)\in\triangle OP_iP_{i+1}$. 当 $n>4$ 时，同样方法可以获得类似方程组，系数矩阵为下列形式：

$$
\begin{pmatrix} A_1 & \\ B_1 & A_2 \end{pmatrix}\vec{C}=0 \tag{2}
$$

而 A_1 便是方程组(1) 的系数矩阵，故(1) 只有零解。亦即，当 $n\geqslant 4$ 时，$s_i(x,y)\equiv 0,(x,y)\in\triangle OP_iP_{i+1}$. 当 $n\leqslant 3$ 时，相应地方程组便为下列方程组：

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & -1 & & & & 0 & 1 & & \\
1 & 2\alpha_1 & -1 & -2\alpha_2 & & & & 1 & 2\beta_2 & & \\
2\alpha_1 & \alpha_1^2 & -2\alpha_2 & -\alpha_2^2 & & & & 2\beta_2 & \beta_2^2 & & \\
\alpha_1^2 & 0 & -\alpha_2^2 & 0 & & & & \beta_2^2 & 0 & & \\
 & & 1 & -\alpha_2 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & & & 0 & 1 \\
 & & 1 & 2\alpha_2 & 0 & -1 & -2\alpha_3 & & & 1 & 2\beta_3 \\
 & & 2\alpha_2 & \alpha_2^2 & 0 & -2\alpha_3 & -\alpha_3^2 & & & 2\beta_3 & \beta_3^2 \\
 & & \alpha_2^2 & 0 & 0 & -\alpha_3^2 & 0 & & & \beta_3^2 & 0 \\
 & & & & \frac{1}{x_3-x_4} & 1 & -\alpha_3 & & & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ c_{22} \\ c_{23} \\ c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \\ c_{22} \\ c_{23} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{pmatrix}=0 \tag{3}
$$

于是，可以通过以下的方程组来确定上述方程组(3) 的解，即：

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2\alpha_1 & 1 & 2\beta_2 \\ 2\alpha_1 & \alpha_1^2 & 2\beta_2 & \beta_2^2 \\ \alpha_1^2 & 0 & \beta_2^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{23} \\ c_{22}+2\alpha_2c_{22} \\ 2\alpha_2c_{22}+\alpha_2^2c_{23} \\ \alpha_2^2c_{23} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2\alpha_3 & 1 & 2\beta_3 \\ -2\alpha_3 & -\alpha_3^2 & 2\beta_3 & \beta_3^2 \\ -\alpha_3^2 & 0 & \beta_3^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{32} \\ c_{33} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -c_{23} \\ -c_{22}-2\alpha_2c_{22} \\ -2\alpha_2c_{22}-\alpha_2^2c_{23} \\ -\alpha_2^2c_{23} \end{pmatrix}
$$

$$
c_{31}=(x_4-x_3)c_{32}+(y_4-y_3)c_{32}
$$

$$
c_{22}=\alpha_2c_{23}
$$

即方程组(3) 有非零解。　　证毕

由定理 2 可知，对于非均匀(Ⅰ)型三角剖分，$s_3^1(\triangle)$ 的 B 样条支撑集为如图 4 所示。

而对于(Ⅱ)型非均匀三角剖分，$s_3^1(\triangle)$ 的 B 样条支撑集为如图 5 所示。由此可见，(Ⅱ)型三角剖分的 $s_3^1(\triangle)$ 中 B 样条支撑集比(Ⅰ)型三角剖分下 $s_3^1(\triangle)$ 中 B 样条支撑简单些。

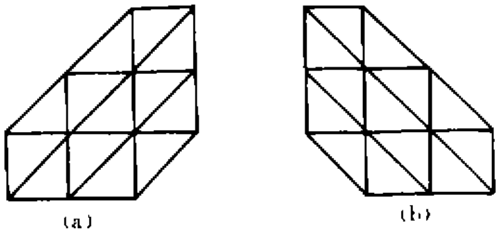

图 4 两种(Ⅰ)型三角剖分下B样条的支撑集

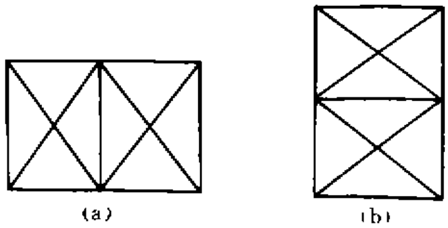

图 5 两种(Ⅱ)型三角剖分下的B样条的支撑集

3 结 论

综上所述,可以得出:

1) 三角剖分下 $s_3^1(\triangle)$ 的B样条支撑集应当满足的条件是本文的核心。

2) 作为特例,不难发现,Ⅱ 型三角剖分B样条支撑集比 Ⅰ 型三角剖分下B样条支撑集更为简单。另外,求出的 Ⅱ 型三角剖分下B样条函数表达式的特性,还有待于进一步研究。

参 考 文 献

1 孙家昶 · 二元三方向剖分中B样条的B网结构及其递推算法 · 计算数学,1990,4:365~376

2 施法中 · 计算机辅助几何设计与非均匀有理B样条 · 北京:北京航空航天大学出版社,1994

3 徐利冶 · 逼近论 · 北京:国防工业出版社,1985

The Representation of the B-spline Functions in $S_2^1(\triangle)$

Lin Yi *Liao Lincan*

(Automobile Motor Engineering Technology Centre, Chongqing University)

ABSTRACT Applying the coordinate condition, we analyse the support problem of B-spline functions in $S_3^1(\triangle)$. The conditions that the support of B-spline functions is exist are got. Specially, we get the B-spline supports of (Ⅰ)、(Ⅱ) triangulations.

KEYWORDS triangulation; spline space; B-spline function