

① 104-110

用于图象压缩中的非等长小波滤波器

TN919.8

朱冰莲^①

曹长修^②

(^① 重庆大学通信与测控学院, 重庆, 400044; ^② 重庆大学自动化学院; 第一作者 38岁, 女, 副教授, 博士生)

TN713

摘 要 构造了用于图象压缩的满足完全重构条件, 具有线性相位的不等长小波滤波器组, 即在小波分解时, 其高通滤波器很短, 而低通滤波器相对较长。这样, 在滤波器等效总长度较短的前提下, 获得了基函数与实际波形较好地匹配。对比实验表明, 所构造的滤波器性能不低于现有的滤波器, 且由于滤波器总长度短, 小波分解与重构所需的时间也比现有滤波器短。

关键词 滤波器; 数字图象处理 / 小波变换; 图象数据压缩

中国图书资料分类法分类号 TN941.1

图象压缩

0 引 言

近年来, 图象子带编码已成为众多学者研究的热门领域。小波变换利用满足一定正侧性条件的完全重构滤波器组提供对信号的子带分解, 这种分解有两类——正交和双正交分解。正交分解在表达上具有更好的去相关性, 但没有线性相位, 这在重建图象中导致高频图象的出现, 而双正交滤波器有线性相位。正交和双正交的情况滤波器的长度都可以是有限的, 但是, 如果只考虑滤波器组的长度限制, 满足这种限制的滤波器组达几千种^[1], 在其中发掘出能在实际应用中满足要求的有效滤波器组乃是笔者的研究目的所在。

在图象编码应用中, 滤波器的设计应该考虑人类视觉心理特性和典型的自然图象的频谱特征。一般自然图象信号是高度不平稳信源, 它由大量的均匀范围和空域支撑较小的边界组成。典型的自然图象的功率谱是很不对称的。文献[2]从滤波器理论出发, 设计出长度不对称的满足完全重构的滤波器组, 而根据小波理论由正交小波构造的滤波器组中每一个都是等长的, 在许多利用双正交小波实现的图象编码中也采用了相等长度的滤波器组。这种限制在图象压缩编码中是否合理? 首先, 在小波分解中采用了极其不对称的树结构, 为何一定要使用等长滤波器组? 其次, 在自然图象的频谱中, 高频信息代表图象的边缘部分, 它们的空域支集很有限, 而低频信息一般占有较大的空域范围, 为何对两种完全不同的空间结构一定要采用等长的滤波器? 基于这样的考虑, 在小波分解时, 高通滤波器可用尽可能短的支集, 而低通滤波器则可使用相对长的支集。

在数据压缩中, 小波基的选择应该使基函数的波形与实际信号的波形尽可能地匹配, 从而使其表达能得以简化。或者说在变换后能用较少的系数来很好地表达信号。例如, 对于一个正弦信号, 如果对它作富里叶变换, 由于富里叶变换的基函数就是正弦型函数, 所以在变

换域的表达非常简单,只有两个系数,但是对于方波,其富里叶系数从理论上讲有无穷多个。又如,对于电视中用的一种测试信号——棋盘信号选用Harr基表达最好。在过去的文献[3]中都提出希望小波具有较高的正侧性,这主要基于图象是光滑的假设,但对于实际的图象信号而言,一般来说并不光滑,通常是由突变的边缘和局部平滑的部分组成,那么对高频边缘选择较短的滤波器(因而基函数不长也不太光滑)应该是合理的。

下面将根据滤波器设计的基本关系,利用双正交小波提供的灵活性来构造符合上述思想的非等长滤波器。

1 完全重构滤波器

在一般情况下,子带编码方案的分解和重构过程是由两对不同的滤波器 $\{\bar{m}_0, \bar{m}_1\}$ 和 $\{\tilde{m}_0, \tilde{m}_1\}$ 来实现(图1)。一个数字信号 s_n 其富里叶变换为:

$$\hat{s}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n e^{-i\omega n}$$

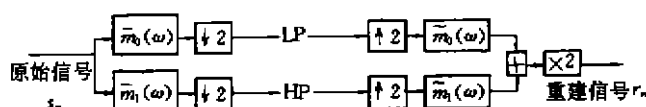


图1 完全重构的子带编码方案框图

经过分解后重构,其输出信号:

$$r_n(\omega) = \alpha(\omega) \cdot \hat{s}(\omega) + \beta(\omega) \cdot \hat{s}(\omega + \pi) \quad (1)$$

其中

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} [\tilde{m}_0(\omega) \cdot \bar{m}_0(\omega) + \tilde{m}_1(\omega) \cdot \bar{m}_1(\omega)]$$

$$\beta(\omega) = \frac{1}{2} [\tilde{m}_0(\omega) \cdot \bar{m}_0(\omega + \pi) + \tilde{m}_1(\omega) \cdot \bar{m}_1(\omega + \pi)]$$

对于所有 $[-\pi, \pi]$ 上的 ω ,当 $\alpha(\omega) = 1, \beta(\omega) = 0$ 时,任意信号都能完全重构。即满足下述重构条件:

$$\tilde{m}_0(\omega) \cdot \bar{m}_0(\omega) + \tilde{m}_1(\omega) \cdot \bar{m}_1(\omega) = 2 \quad (2)$$

$$\tilde{m}_0(\omega) \cdot \bar{m}_0(\omega + \pi) + \tilde{m}_1(\omega) \cdot \bar{m}_1(\omega + \pi) = 0 \quad (3)$$

的解 $\tilde{m}_0(\omega), \bar{m}_0(\omega), \tilde{m}_1, \bar{m}_1(\omega)$ 就是要求的滤波器。为了避免无限冲激响应滤波器解的出现,附加一个单项式

$$\rho(\omega) = \alpha e^{ik\omega} \quad \alpha \neq 0, k \in \mathbb{Z}$$

即

$$\rho(\omega) [\tilde{m}_0(\omega) \cdot \bar{m}_0(\omega) + \tilde{m}_1(\omega) \cdot \bar{m}_1(\omega)] = 2$$

为了计算方便,选 $\alpha = -1, k = 1$,这样有:

$$\tilde{m}_0(\omega) \cdot \overline{\bar{m}_0(\omega)} + \bar{m}_0(\omega + \pi) \cdot \overline{\tilde{m}_0(\omega + \pi)} = 1 \quad (4)$$

$$\bar{m}_1(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\tilde{m}_0(\omega + \pi)} \quad (5)$$

$$\tilde{m}_1(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\bar{m}_0(\omega + \pi)} \quad (6)$$

式(1)~(3)是具有完全重构的子带编码中有限冲激响应滤波器应满足的最一般的条

件。

设 m_0 和 m_1 对应的时域形式分别为 h_n 和 g_n , 其长度分别为 N_0 和 N_1 , 则由 h_n 和 g_n 组成的实系数完全重构滤波器组的长度之间有如下关系^[4]:

- a) 若 N_0 和 N_1 为奇数, 则 h_n 和 g_n 同时为对称的, 且长度差是 2 的奇数倍;
- b) 若 N_0 和 N_1 为偶数, 则 h_n 和 g_n 中一个是对称的, 另一个是反对称, 且长度 N_0 和 N_1 相等或相差 2 的偶数倍;
- c) 若 N_0 和 N_1 中一个为奇数, 另一个为偶数, 且全部零点在单位圆上, 则 h_n 和 g_n 或者同时为对称的, 或者是一个为对称的, 另一个为反对称的。

2 不等长小波滤波器的构造

为了使设计的滤波器能满足前面给出的线性相位完全重构滤波器长度的限制, 并具有一般性, 下面推导其一般表达。

第一种情况: 如果取相应于 m_0 的滤波器的长度为奇数且是对称的, 即:

$$m_0(-\omega) = e^{2ik\omega} m_0(\omega)$$

则 m_0 可写成:

$$m_0(\omega) = e^{-ik\omega} \tilde{p}_0(\cos\omega) \quad (7)$$

其中 \tilde{p}_0 是多项式, \tilde{m}_0 选择同样形式:

$$\tilde{m}_0(\omega) = e^{-ik\omega} \tilde{\tilde{p}}_0(\cos\omega) \quad (8)$$

\tilde{p}_0 是满足:

$$\tilde{p}_0(x) \tilde{\tilde{p}}_0(x) + \tilde{p}_0(-x) \tilde{\tilde{p}}_0(-x) = 1 \quad (9)$$

的任意多项式, 因此有:

$$m_0(\omega) \tilde{m}_0(\omega) + m_0(\omega + \pi) \tilde{m}_0(\omega + \pi) = 1 \quad (10)$$

这实际上就是(2)式。

第二种情况: 若 m_0 的长度为偶数, 则 m_0 满足 $m_0(-\omega) = e^{2ik\omega + i\omega} m_0(\omega)$, 因此

$$m_0(\omega) = e^{-ik\omega - n\omega/2} \cos \frac{\omega}{2} \tilde{p}_0(\cos\omega) \quad (11)$$

同样可以选择 \tilde{m}_0 为:

$$\tilde{m}_0(\omega) = e^{-ik\omega - n\omega/2} \cos \frac{\omega}{2} \tilde{\tilde{p}}_0(\cos\omega) \quad (12)$$

等式(10)变成:

$$\cos^2 \frac{\omega}{2} \tilde{p}_0(\cos\omega) \overline{\tilde{p}_0(\cos\omega)} + \sin^2 \frac{\omega}{2} \tilde{p}_0(-\cos\omega) \overline{\tilde{p}_0(-\cos\omega)} = 1$$

令 $\tilde{p}^*(x) = \frac{1+x}{2} \tilde{p}_0(x)$, 上式中变成:

$$\tilde{p}^*(x) \overline{\tilde{p}^*(x)} + \tilde{p}^*(-x) \overline{\tilde{p}^*(-x)} = 1$$

为了使解既有对称性, 又有某种正侧性, (11)、(12) 给出的三角多项式 m_0 和 \tilde{m}_0 中的 $\tilde{p}_0(\cos\omega)$ 和 $\tilde{\tilde{p}}_0(\cos\omega)$ 对任意 $l > 0$, 都应该能被 $(1 + e^{i\omega})^l$ 除尽, 又为了使得它们能以 $\cos\omega$ 为变量, l 自然要取偶数, 因为: $(1 + e^{i\omega})^2 = 4e^{i\omega} \cos^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) = 2e^{-i\omega} (1 + \cos\omega)$. 假设 $k = 0$ (即 h_n 和 \tilde{h}_n

对称于 0), 若为偶数, 则 m_0 和 \tilde{m}_0 具有 $\left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{2l} q_0(\cos \omega)$ 的形式; 若为奇数, 则 m_0 和 \tilde{m}_0 具有 $e^{-i\frac{\omega}{2}} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{2l+1} q_0(\cos \omega)$ 的形式。把这两种情况代入(10)有:

$$\left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{2L} q_0(\cos \omega) \overline{q_0(\cos \omega)} + \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2L} q_0(-\cos \omega) \overline{q_0(-\cos \omega)} = 1 \quad (13)$$

对于第一种情况 $L = 1 + l$, 而对于第二种情况 $L = l + l + 1$, 如果定义:

$$q_0(\cos \omega) \overline{q_0(\cos \omega)} = P\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)$$

则(13)变成

$$(1-x)^L P(x) + x^L P(1-x) = 1 \quad (14)$$

此方程的解的一般形式为:

$$P(y) = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{L-1+j}{j} y^j + y^R (1-2y) \quad (15)$$

其中, R 为奇多项式。取 $R \equiv 0, \tilde{q} \equiv 0$, 则 $\tilde{N} = 2l$ 时,

$$\tilde{m}_0(\omega) = \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^N \quad (16)$$

而 $\tilde{N} = 2l + 1$ 时,

$$\tilde{m}_0(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^N \quad (17)$$

对于 $N = 2l$

$$m_0(\omega) = \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{N+l-1} \sum_{m=0}^{l+l-1} \binom{l+l-1+m}{m} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^m \quad (18)$$

在第二种情况下 $N = 2l + 1$

$$m_0(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^N \sum_{m=0}^{l+l} \binom{l+l-1+m}{m} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^m \quad (19)$$

两种情况下, 所得结果是双正交紧支集样条小波, 对于固定的 $l > 0$, l 可以自由选择, 且能满足线性相位完全重构滤波器长度的限制关系。利用式(16)和(18)并结合式(5)和(6)可以设计出长度为偶数的对偶滤波器; 而利用(17)和(19)并结合式(5)和(6)可以设计出长度为奇数的对偶滤波器。

$$\begin{aligned} \text{令} \quad m_0(\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-j\omega n} & m_1(\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) e^{-j\omega n} \\ \tilde{m}_0(\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}(n) e^{-j\omega n} & \tilde{m}_1(\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}(n) e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

利用(5)、(6)选择满足上述限制的 l 和 l , 计算出滤波器的系数, 其结果如表 1、表 2 所示。

3 性能估计

为了估计所设计的滤波器的性能, 对所设计的滤波器从以下几个方面进行分析。

表 1 $l=1, l=1, 2, 3$ 滤波器长度为奇数时的滤波器参数

n	$g(n)$	$h_1(n)$	$h_2(n)$	$h_3(n)$
-6				-0.004 882 812 5
-5				0.009 765 625
-4			0.023 437 5	0.033 201 250
-3			-0.046 875	-0.076 171 857
-2		-0.125	-0.125 000	-0.120 117 187 5
-1	0.25	0.25	0.296 875	0.316 406 25
0	-0.5	0.75	0.703 125	0.683 593 57
1	0.25	0.25	0.296 875	0.316 406 25
2		-0.125	-0.125 000	-0.120 117 187 5
3			-0.046 875	-0.076 171 875
4			0.023 437 5	0.033 201 250
5				0.009 765 625
6				-0.004 882 812 5

表 2 $l=1, l=1, 2, 3$ 滤波器长度为偶数时的滤波器参数

n	$g(n)$	$h_1(n)$	$h_2(n)$	$h_3(n)$
-8				0.002 136 230 468 75
-7				-0.006 408 691 406 25
-6			-0.009 765 625	-0.011 901 855 468 75
-5			0.029 296 875	0.052 795 410 152 5
-4		0.093 75	0.037 109 375	0.091 226 074 218 75
-3		0.000 00	-0.189 453 125	-0.282 287 597 656 3
-2	0.125	-0.625 00	-0.005 078 125	-0.129 089 355 468 8
-1	-0.375	0.468 75	0.683 593 75	0.570 373 535 156 3
0	0.375	0.468 75	0.683 593 75	0.570 375 351 563
1	-0.125	-0.625 00	-0.005 078 125	-0.129 089 355 468 8
2		0.00000	-0.189 453 125	-0.282 287 597 656 3
3		0.093 75	0.037 109 375	0.091 226 074 218 75
4			0.029 296 875	0.052 795 410 152 5
5			-0.009 765 625	-0.011 901 855 468 75
6				-0.006 408 691 406 25
7				0.002 136 230 468 75

注: $h_1(n)$ 、 $h_2(n)$ 、 $h_3(n)$ 分别对应 $l=1, 2, 3$

3.1 能量集中性

在数据压缩中, 衡量一种变换的一个重要指标是能量的集中性能。虽然, 从理论上说双正交滤波器因为存在冗余, 去相关能力不如正交滤波器, 但是, 正交小波滤波器因不具有线性相位在图象压缩应用中其良好的压缩性能会因此而大受影响。又因为只有交流能量中才包含有用信息, 故可用方差作为能量的测度。用表 1、表 2 中的几组滤波器分别对图象作小波分解, 所得的 4 个子图分别为 LL、LH、HL、HH, 计算出各自的方差其结果当 $l=1, l=2, N=2l$ 时(即 3/9 滤波器)最好。因此, 舍弃另外几组滤波器。将 Daubechies 长度为 8 的正交滤波器^[5]、文献[6]所设计的滤波器及 Burt 的双正交滤波器^[5]与本文的 3/9 滤波器作比较, 结果

见表 3.

表 3 几种滤波器作分解后各子带的方差

	Daubechies 步	文献[6]	Burt	本文滤波器
LL	5649.58	3299.46	3817.96	1926.27
LH	292.51	26.43	50.05	19.80
HL	54.90	22.91	42.63	17.38
HH	24.37	7.44	18.15	4.15

考虑到 4 个子带方差的相对大小,从表 3 中可见,用本文提供的滤波器作分解后,三个高频子带 LH、HL、HH 相对于低频子带 LL 其方差是很小的。单从方差分布的意义上讲,甚至比表 4 中 Daubechies 正交滤波器和 Burt 的双正交滤波器的效果更好,而本文提供的滤波器却不比表 3 中任何一种长(Burt 的双正交滤波器与本文中的 3/9 的等效长度相同)。

3.2 重建图象的质量

在经三次小波分解后重构(但未作量化和压缩编码)的情况下,其峰-峰信噪比 PRNS 分别为:Daubechies 的正交滤波器 18.587 dB,文献[6]的滤波器 35.535 dB,本文的 3/9 步滤波器 36.93 dB,Burt 的双正交滤波器 39.182 dB. 重建图象见图 2. 重建图象的主观质量除用 Daubechies 的正交滤波器作分解与重构时在图象边缘上可见到误差外其余的几种滤波器均没有区别,这主要是因为除 Daubechies 的正交滤波器外,其他的几个滤波器都是线性相位的,因此不会在边缘上出现高频臆象,从而能在峰-峰信噪比 PRNS 不同的情况下获得较为一致的主观感受。这也说明峰-峰信噪比 PRNS 虽然反映出原始图象与重建图象之间的实际数据之间的误差,却不能正确地反映人眼视觉系统对图象的质量的主观感受。关于这个问题另有文章作专门地讨论。

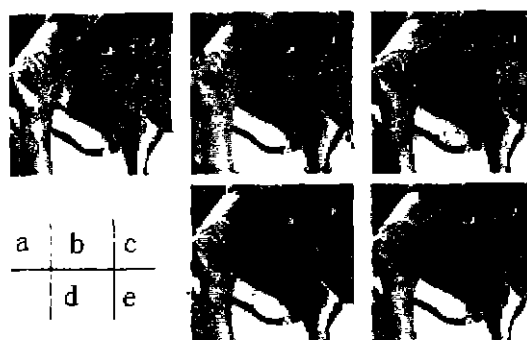


图 2 用几种不同滤波器分解后重构的图象

3.3 计算量

众所周知,小波变换用于图象编码较之与传统的方法如 DCT(离散余弦变换)、DPCM(差分脉冲编码调制)等有它独有的优点,但其计算量却远大于许多传统的方法。这也是阻碍它进入实用的一个急需解决的问题。笔者所设计的两种滤波器,其长度一长一短,但其总长度都不长,远远地短于文献[6]的滤波长度($N=23$),与 Daubechies 长度为 8 的正交滤波器相比,其一,等效长度更短,其二,所设计的滤波器因为是对称的,与等长的非对称滤波器相比其乘法次数可以减少一倍。而对于二维滤波(这里采用的是可分离的二维滤波,即用两次一

维滤波来完成),如果忽略加法的计算量,则其计算量可减少约 4 倍(因为乘法与加法相比主要是乘法耗时)。

4 结 论

笔者针对一般图象结构的不对称性,提出了非等长滤波器的概念,并用双正交小波来实现了这一思想,构成了极其不等长的线性相位滤波器,通过比较,对其性能进行了估计,结论是,所构造的不等长滤波器在能量集中性方面优于对比滤波器,重建图象的主观感觉与对比用滤波器相当,计算量不大于对比滤波器。

参 考 文 献

- 1 Ben Belzer, Jean-Marc Lina, John Villasenor. Complex, Linear-phase Filter for Efficient Image Coding. IEEE Trans on Signal Procession, 1995, 43(10): 2425~2427
- 2 Olivier Egger, Wei Li. Subband Coding of Images Using Asymmetrical Filter Banks. IEEE Trans on Image Procession, 1995, 4(4): 478~485
- 3 Antonini M, Barlaud M, Mathieu P, Daubechies. Image Coding using Wavelet Transform. IEEE Trans on Image Procession, 1992, 1(4): 205~220
- 4 Martin Vetterli, Cormac Herley. Wavelet and Filter Banks, Theory and Design. IEEE Trans on Signal Processing, 1992, 40(9): 2207~2232
- 5 Ingrid Daubechies. Ten Lecture on Wavelets. CBMS-NSFSeries on Applied Math Philadelphia, PA Siam, 1992
- 6 秦前青, 杨宗凯. 实用小波分析. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994. 142~148

Asymmertical Wavlet Filter Banks for Image Compression

Zhu Bingjian Cao Changxiu

(College of Communication and Information Engineering, Chongqing University)

ABSTRACT The wavelet filter banks for image compression satisfying the conditions of perfect reconstruction, linear phase, asymmetric length are constructed. That is, in the wavelet decomposition analysis highpass filter is very short, the lowpass filter is long. So in the condition of filter bank's equivalent length being short, basic functions match with signal wave form well. The experiments show that the performances of such filter banks are good and the speed is high during the decomposition or reconstruction compared with present one since its equivalent length is short.

KEYWORDS filter; digital image processing / wavelet transform; image data compression

(责任编辑 吕赛英)