1998 年 11 月 第 21 卷第 6 期
重庆大学学报 （自然科学版）
Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)
Vol. 21 Nov. 1998

20

一类循环图的色数*

111-116

O157.5

瞿晓鸿 杨晓帆 柏 森
（重庆大学计算机研究所，重庆，400044；第一作者 32 岁，女，硕士）

摘 要 循环图具有很强的对称性，作为有价值的通讯网络拓扑已受到广泛的关注。研究了一类循环图 $C_n<1,k>$，完全确定了其色数。

关键词 图论 / 循环图；色数
中国图书资料分类法分类号 O157.5；TP302

Cayley 图
群论

0 引 言

用群论方法研究图论的一个重要内容就是 Cayley 图，所谓 Cayley 图，就是由 群$(G,\circ)$ 以及 G-{1} 的满足 $H=H^{-1}$ 的子集按照下列方式构造的图 $\Gamma(G,H)$：

$$V(\Gamma(G,H)) = G$$
$$E(\Gamma(G,H)) = \{\{g,g\circ h\}; g\in G, h\in H\}$$

由于群 G 的固有对称性以及 H 的对称性$(H=H^{-1})$，Cayley 图具有很高的对称性，从而被作为有价值的通讯网络拓扑而受到广泛关注。

所谓循环图，就是将群$(G,\circ)$取定为模 n 的剩余类群 Z/n 时，对应的Cayley 图。假定 $H=\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}$，其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r<(n+1)/2$，则将对应循环图记为 $C_n<i_1,i_2,\cdots,i_r>$. 即：

$$V(C_n<i_1,i_2,\cdots,i_r>) = \{0,1,2,\cdots,n-1\}$$
$$E(C_n<i_1,i_2,\cdots,i_r>) = \{\{i,i\pm j\}; i\in Z/n, j\in H\}$$

其中的加减法均是对模 n 而言。图 1 给出三个典型的循环图。

由于循环图优美的对称性和潜在的实用价值，许多学者就此进行了深入研究，得到了不少有价值的结果。例如，循环图的构造[1]、Hamilton 性、连通性[2]，泛圈性[4] 和边色数。但就笔者所知，关于循环图的色数还没有实质性结论。

笔者对 $C_n<1,k>$ 进行了研究，用图论的方法完全确定了其色数。

1 $C_n<1,k>$ 的色数

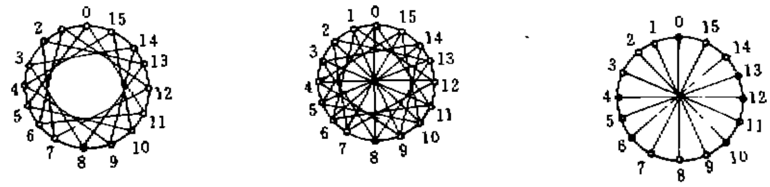
首先，给出要用到的两个命题。

命题 1（Brooks 定理） 若 G 既不是奇圈，又不是完全图，则 $\chi\leqslant\Delta$

命题 2 若图 G 是二部图，则 $\chi(G)=2$.

---

* 收文日期 1997-07-02



(a) $C_{16}<1,5>$　(b) $C_{16}<1,5,8>$　(c) $C_{16}<1,8>$

图 1　三个典型的循环图

用(n, k)表示n与k的最大公因数。下面只就$k<n/2$进行讨论(已知当$k=n/2$是奇数，$\chi=2$；$k=n/2$是偶数时，$\chi=3$)[5]。如果k为奇数，$G_n<1, k>$的色数有以下结论。

定理 1　如果k是奇数，则

1）如果$n/(n,k)$是偶数，则$\chi=2$；

2）如果$n/(n,k)$是奇数，则$\chi=3$.

证明 1)：$n/(n,k)$偶$\Rightarrow n$偶$\Rightarrow C_n<1, k>$为二部图$\Rightarrow \chi=2$.

证明 2)：$n/(n,k)$奇$\Rightarrow n$奇$\Rightarrow C_n<1,k>$为非二部图$\Rightarrow \chi \geqslant 3$.

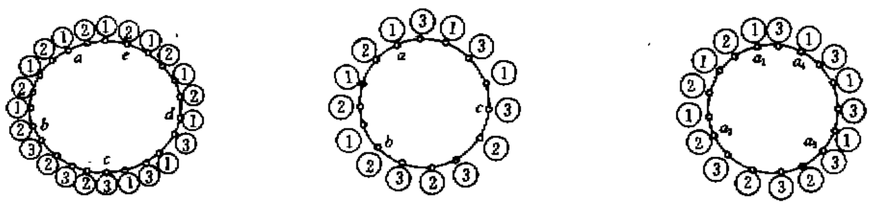
下面找到一种对$C_n<1, k>$只需用 3 种颜色的顶点着色的方法，所以$\chi \leqslant 3$，从而$\chi=3$. 令$n=k\times m+r, 0\leqslant r<k$，分三种情况来找$C_n<1, k>$的着色方法。

情况 1：当r为奇数时

首先，选$m+1$个顶点，使这$m+1$个顶点(用字母a、b、c… 标注)在同一内圈上，沿逆时针方向，用颜色 ①、②、③ 顺序交替给它们上色，要求相邻顶点不同色。则未着色顶点被分成$m+1$个部分：　$A_1, A_2, \cdots, A_m, B$

其中$|A_i|=k-1, |B|=r-1$，A_i(包括B)中的顶点是依次相邻的。

其次，对A_i(包括B)用与之相邻的两个顶点的颜色交替着色。可以证明，相邻顶点不同色。事实上，A_i与A_{i+1}或者一种、或者两种颜色相同，但同色顶点间相距偶数个顶点，因此不会相邻。同理，B与A_i中的同色顶点间也相距偶数个顶点，因此也不会相邻(如图 2(a)).



(a) $C_{23}<1、5>$ (r为奇数)　(b) $C_{15}<1, 5>$ ($r=0$)　(c) $C_{17}<1, 5>$ (r为偶数)

图 2　k，n为奇数时，r的三种情况的循环图着色方法举例

情况 2：当 $r=0$ 时

选 m 个顶点，使这 m 个顶点（用字母 a、b、c… 标注）在同一内圈上，沿逆时针方向，用颜色①、②、③ 顺序交替给它们上色，要求相邻顶点不同色。此时，m 个顶点恰好将未着色的顶点等分成 m 个部分：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m$$

其着色的方法与情况 1 同(图 2(b)).

情况 3：当 $r>0$ 且为偶数时

首先，选 $m+1$ 个顶点，使这 $m+1$ 个顶点（用字母 $a_1, a_2, \cdots, a_{m+1}$ 标注）在同一内圈上，沿逆时针方向，用颜色 ①、②、③ 顺序交替给它们上色，要求相邻顶点不同色。则未着色顶点被分成 $m+1$ 个部分：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m, B$$

其中 $|A_i|=k-1$，$|B|=r-1$，$i=1,2,\cdots,m$. A_i（包括 B）中的顶点是依次相邻的。如果 a_1 和 a_{m+1} 同为① 色，用②、① 或③、① 对 B 交替着色，易证相邻顶点不同色（如图 2(c)）. 否则，A_m 两端的顶点 a_m 和 a_{m+1} 的颜色只能是 ②、③ 或 ③、②.

其次，对 A_i 用与之相邻的两个顶点的颜色交替着色($i=1, 2, \cdots, m-1$)，对 $A_m \cup B$ 用颜色 ②、③ 交替着色。

同理，相邻顶点不同色。

综上所述，对 $C_n<1, k>$ 只须用 3 种颜色着色。故 $\chi=3$.

若 $k=2$ 或 $k=(n-1)/2$，则 $G_n<1,k>$ 的色数有以下结论。

定理 2　如果 $k=2$ 或 $k=(n-1)/2$，则

1) 当 $n|3$ 时，$\chi=3$；

2) 当 $n\nmid 3$ 时，$\chi=4$.

证明：先证 $k=2$ 的情况，用反证法。假设对 $C_n<1, 2>$ 只须用 3 种颜色着色，则必然是这样着色：沿逆（或顺）时针方向，颜色 ①、②、③ 在 n 圈上同时顺序出现（①、②、③，①、②、③，…），这只可能出现两种情况：

情况 1：颜色 ①、②、③ 刚好同时着完所有顶点 $\Leftrightarrow n|3$（如图 3(a)），故 $\chi \leqslant 3$. 又 $C_n<1, 2>$ 是非二部图 $\Rightarrow \chi \geqslant 3$. 所以，$n|3$ 时，$\chi=3$.

情况 2：颜色①、②、③不能同时着完所有顶点，则可能剩下一个或两个顶点（如图 3(b)、(c)）$\Leftrightarrow n\nmid 3$. 此时，剩下的顶点既不能着 ① 色，也不能着 ②、③ 色。故 $\chi \geqslant 4$.

而由 Brooks 定理知：$\chi \leqslant 4$，所以，$n\nmid 3$ 时，$\chi=4$.

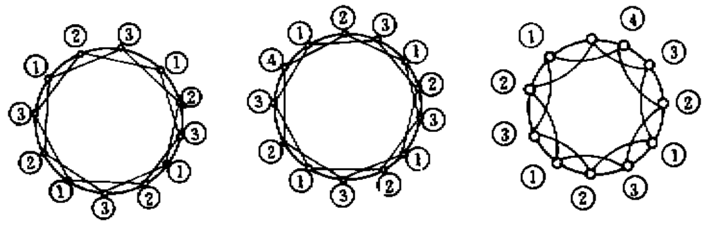
对 $k=(n-1)/2$ 的情况，也用反证法。假设对 $C_n<1,(n-1)/2>$ 只须用 3 种颜色着色，则必然是按下列方式着色：

不失一般性，选定一个 3 圈：$0 \to \frac{n-1}{2} \to \left(\frac{n-1}{2}+1\right) \to 0$，用颜色 ①、②、③ 分别给顶点 $0, \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}+1$ 着色，沿逆时针方向，未着色顶点被分为：

$$C_1=\left\{1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}-2,\frac{n-1}{2}-1\right\}$$

$$C_2=\left\{\frac{n-1}{2}+2,\frac{n-1}{2}+3,\cdots,n-2,n-1\right\}$$

其中
$$|C_1| = |C_2|$$



(a) $C_{12} < 1, 2 >$　　(b) $C_{13} < 1, 2 >$　　(c) $C_{11} < 1, 2 >$

图 3　$k = 2$ 时，循环图 $C_n < 1, k >$ 的着色方法分析

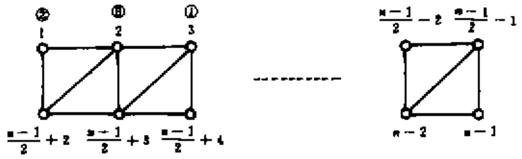


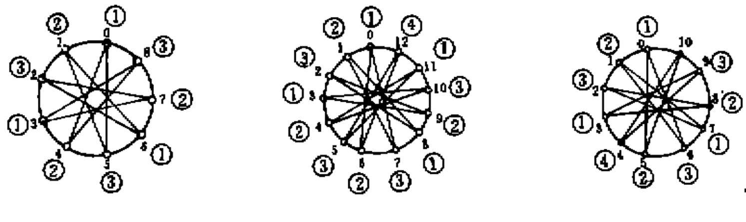
图 4　$k = (n-1)/2$ 时的着色方法分析

接下来，用颜色 ②、③、① 分别给 C_1、C_2 中顶点依次交替着色：从而，顶点 $\left(\frac{n-1}{2} - 2\right)$ 可能着色 ③ 或 ② 或 ①(如图 4)。

情况 1：$\left(\frac{n-1}{2} - 2\right)$ 着色 ③ ⇒ $(n-2)$ 着色 ② ⇒ $\left(\frac{n-1}{2} - 2\right)$ 着色 ① ⇒ $(n-1)$ 着色 ③(如图 5(a))。

所以，颜色 ①、②、③ 刚好同时着完所有顶点 $\Leftrightarrow n|3$，故 $\chi \leqslant 3$。

又 $C_n < 1, (n-1)/2 >$ 为非二部图 $\Rightarrow \chi \geqslant 3$，所以，$n|3$ 时，$\chi = 3$。



(a) $C_9 < 1, 4 >$　　(b) $C_{13} < 1, 6 >$　　(c) $C_{11} < 1, 5 >$

图 5　$k = (n-1)/2$ 时，三种情况的着色方法举例

情况 2：$\left(\frac{n-1}{2} - 2\right)$ 着色 ② ⇒ $(n-2)$ 着色 ① ⇒ $\left(\frac{n-1}{2} - 1\right)$ 着色 ③ $\left(\frac{n-1}{2}\right.$ 着色 ②$\left.\right)$ ⇒ $(n-1)$ 着色 ④ (如图 5(b))。

情况 3：$\left(\frac{n-1}{2}-2\right)$ 着色 ①⇒$(n-2)$ 着色 ③⇒$\left(\frac{n-1}{2}-1\right)$ 着色 ②$\left(\frac{n-1}{2}\right.$ 着色 ②$\left.\right)$⇒$\frac{n-1}{2}$ 着色 ④(如图 5(c)).

当颜色 ①、②、③ 不能同时着完所有顶点(情况 2、情况 3) ⇔$n|3$，故 $\chi \geqslant 4$.

由 Brooks 定理，知 $\chi = 4$.

总之，当 $n|3$ 时，$\chi = 3$；当 $n\nmid 3$ 时，$\chi = 4$.

如果 $k > 2$ 且为偶数，$C_n < 1, k >$ 的色数有以下结论。

定理 3　若 $k > 2$ 且是偶数，则 $\chi = 3$.

证明：$k > 2$ 且偶 ⇒$C_n < 1, k >$ 非二部图 ⇒$\chi \geqslant 3$.

下面我们可以找到一种对 $C_n < 1, k >$ 只需用 3 种颜色着色的方法，所以，$\chi \leqslant 3$. 将 n 分解为 $n = (k-1) \times m + r, 0 \leqslant r < k-1$

情况 1：若 $r = 0$ 或 $r > 1$ 且为奇数时

首先，用颜色 ① 给一部分顶点着色，使未着色顶点被分成 $m+1$ 个部分：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m, B$$

其中 $|A_i| = k-2(i = 1,2,\cdots,m)$，$|B| = r-1$，$A_i$(包括 B) 中的顶点是依次相邻的。

其次，沿顺时针方向，用颜色 ②、③ 交替给 A_i(包括 B) 中顶点着色，则用颜色 ①、②、③ 刚好可以着完(如图 6(a)、(b)).

可以证明，相邻顶点不同色。

事实上，A_i 与 A_{i+1} 中同色顶点间相距奇数个顶点，因此，不可能相邻；若 B 与 A_i 相邻，则它们之中的同色顶点之间相距奇数个顶点，因此也不相邻。

情况 2：当 r 为偶数或 $r = 1$ 时

$n = (k-1) \times m + 1 = (k-1) \times (m-1) + k$

$n = (k-1) \times m + r = (k-1) \times m + 2t \quad (1 \leqslant t \leqslant k/2)$

首先，用颜色 ① 给一部分顶点着色，使未着色顶点被分成 $m+t$ 个部分：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m; \qquad B_1, B_2, \cdots, B_t$$

其中 $|A_i| = k-2, i = 1,2,\cdots,m$；$|B_j| = 1, j = 1,2,\cdots,t$. A_i 中顶点依次相邻，而且在 A_i 与 A_{i+1} 之间至多有两个 B_j，A_i 与 B_j 共有下列三种关系：

$$A_i \cup A_{i+1} \text{ 或 } A_i \cup B_j \cup A_{i+1} \text{ 或 } A_i \cup B_j \cup B_{j+1} \cup A_{i+1}$$

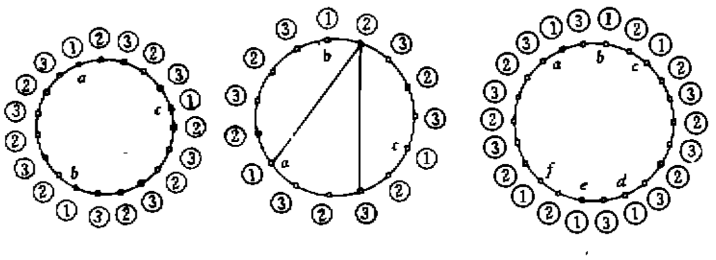
在每种情况中，顺序两个顶点要么相邻，要么被一个颜色 ① 顶点分隔。

其次，沿顺时针方向，对 A_i 中的顶点，用颜色②、③ 交替给中顶点着色，$i = 1,2,\cdots,m$；在 $A_i \cup B_j \cup A_{i+1}$ 中，对 B_j 中的顶点着颜色 ②(或 ③)；在 $A_i \cup B_j \cup B_{j+1} \cup A_{i+1}$ 中，B_j 着色 ③，B_{j+1} 着色 ②. 可以证明，相邻顶点不同色。

由情况 1 知，A_i 与 A_{i+1} 中同色顶点不相邻；在 $A_i \cup B_j \cup A_{i+1}$ 的情况，B_j 中的顶点与沿顺时针方向，逆时针方向着颜色 ① 的顶点相邻；在 $A_i \cup B_j \cup B_{j+1} \cup A_{i+1}$ 的情况，已知 B_j 着色 ③，B_{j+1} 着色 ②，着颜色 ③ 的顶点与逆时针方向着颜色 ① 的顶点相邻、与沿顺时针方向着颜色 ③ 的顶点相邻。着颜色 ② 的顶点与沿顺时针方向着颜色 ① 的顶点相邻、与逆时针方向着颜色 ③ 的顶点相邻(图 6(c)).

综上所述，用 3 种颜色可将所有顶点全部着色完。

所以，当 $k > 2$ 且为偶数时，$\chi = 3$.



(a) $C_{19}<1,8>$ (b) $C_{15}<1,6>$ (c) $C_{22}<1,8>$

图 6 $k>2$ 且为偶数时，三种情况的着色方法举例

由定理 1 ～ 3 知，完全确定了 $C_n<1,k>$ 的色数。

参 考 文 献

1 Fiol M A. On congruence in Z^n and the dimension of a multidimensional circulant. Discrete Mathematics, 1995, 141(2): 123～134

2 Boeschand F, Tindell R. Circulants and their Connectivities. J. GraphTheory, 1984, 8(4): 487～499

3 Edward Dobson. Isomorphism problem for Cayley graphs of Z_p^3. Discrete Mathematics, 1995, 147(1), 87～94

4 Bogdanowicz Z R. Pancyclicity of Connected Circulant Graphs. J. GraphTheory, 1996, 22(2): 167～174

5 瞿晓鸿. 广义 Heawood 图和广义 McGee 图及其性质: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆大学应用数学系, 1997

6 J. A. 邦迪, U. S. R. 默蒂. 图论及其应用. 北京: 科学出版社, 1984, 1～284

The Chromatic Numbers of a Class of Circulants

Qu Xiaohong *Yang Xiaofan* *Bai Sen*

(Research Institute of Computer Science, ChongqingUniversity)

ABSTRACT There are good symmetry in the circulants. Communication network topology is largely focused because of its value of application. The chromatic numbers of the circulants $C_n<1,k>$ are completely determined.

KEYWORDS graph theory / circulant; chromatic number

（责任编辑 吕赛英）