文章编号:1000-582x(1999)03-0053-05

⑨
53-57

涡流场中位函数T、Ω的存在性与唯一性探讨*

TM154.21
O441.4

汪泉弟,谭邦定,姜可薰
(重庆大学 电气工程学院,重庆 400044)

摘 要:用线性函数空间理论证明了涡流场中位函数T、Ω的存在性,并对退化位T的唯一性作出了新的证明。退化位T的出现,表明用给定矢量位的散度来获得唯一解并不是唯一的方法。

关键词:函数空间;电磁场/位函数法 涡流场
中图分类号:TM 153 **文献标识码**:A

用位函数求解涡流场是一种有效的方法,通过Maxwell方程组可导出涡流场的位函数控制方程,然后再对控制方程进行求解。目前对位函数存在性的研究很少有文献涉及到,通常在引入一种方法之后仅仅证明唯一性,但没有存在性所支持的唯一性证明显然是不可靠的,笔者给出的位函数存在性证明方法普遍适用于电磁场问题。

与位函数存在性密切相关的是唯一性。由物理定律引入的位函数,若不加上其它约束条件,这样的位函数如果存在,将会有无数多个。从物理的观点看,这不会带来任何麻烦,因为所有的位函数将给出完全相同的矢量场。但从计算的角度看,无唯一解的方法是不能用的。因此,为获得位函数唯一解的规范条件便提出来了。在传统方法中,人们总是把位函数的规范条件限制在给定位函数的散度上,从给定矢量位的库仑规范或洛仑兹规范来获得唯一解。从数学的观点看,给定矢量位的散度,只是获得唯一解的一种约束条件,不应是唯一方式。于是Carpenter在1977年提出了退化位的概念,这种新的约束条件在数学上同样能保证解唯一。鉴于文献[1]在退化位 **T**的唯一性证明中对 **T**另外又加了两条不必要的约束,因此笔者还要给出一种简单而直接的证明方法。

1 数学基础

设$L^2(v)$空间由在有界开域v上平方可积的标量场φ构成,$\mathbf{L}^2(v)$空间由在有界开域v上平方可积的矢量场$\boldsymbol{F}$构成,v为R^3中的有界开域,则

定义1 在$L^2(v)$中一切具有平方可积梯度的标量场构成了$H^1(v)$,即

$$H^1(v)=\{\varphi\in L^2(v);\nabla\varphi\in \mathbf{L}^2(v)\}$$

* 收稿日期:1998-03-09
作者简介:汪泉弟(1954-),女,安徽旌德县人,重庆大学副教授,博士,从事电磁场理论及计算研究。

定义 2 在 $L^2(v)$ 中一切具有平方可积旋度的矢量场构成了 $H(\nabla\times; v)$，即

$$H(\nabla\times; v) = \{\mathbf{F}\in L^2(v); \nabla\times\mathbf{F}\in L^2(v)\}$$

定义 3 在 $L^2(v)$ 中一切具有平方可积散度的矢量场构成了 $H(\nabla\cdot; v)$，即

$$H(\nabla\cdot; v) = \{\mathbf{F}\in L^2(v); \nabla\cdot\mathbf{F}\in L^2(v)\}$$

以上的每一个函数空间均为在适当内积下的 Hilbert 空间。对于时变场，可通过映射函数将时间区间 $[0, T]$ 映入上面的 Hilbert 空间。

定义 4 设 X 是普通的 Hilbert 空间，$\|\cdot\|_X$ 是它的范数，则时域上的标量平方可积空间为

$$L^2(0, T; X) = \{f \mid f: [0, T]\rightarrow X, \int_0^T \|f(t)\|_X^2 \mathrm{d}t < \infty\}$$

其中 f 是映射函数，$L^2(0, T; X)$ 仍是 Hilbert 空间。

时域上的矢量平方可积空间可用类似的方法定义。在位函数的存在性证明中，要用到 de Rham 组合体(de Rham's complex)，下面对它作简单介绍。

de Rham 组合体由 4 个 Hilbert 空间和 3 个微分子算子构成，见图 1.

$$L^2(v) \xrightarrow{\nabla} L^2(v) \xrightarrow{\nabla\times} L^2(v) \xrightarrow{\nabla\cdot} L^2(v)$$

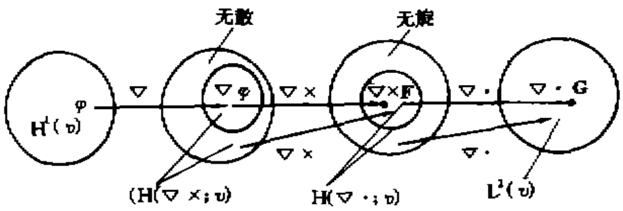
图 1 de Rham 组合体

de Rham 组合体的两个基本性质如下：

1) 如果定义域 v 和边界 ∂v 是简单的连通域，由梯度算子构成的 $H^1(v)$ 的象严格的是 $H(\nabla\times; v)$ 中的旋度算子的核或零空间。

2) 如果定义域 v 和边界 ∂v 是简单的连通域，由旋度算子构成的 $H(\nabla\times; v)$ 的象严格的是 $H(\nabla\cdot; v)$ 中的散度算子的核或零空间。

图1表明，de Rham 组合体是一个严格的序列，且它依赖于 v、∂v 的连通性假设，如果 v 或 ∂v 其中之一不是简单的连通域，组合体的严格序列将不存在。组合体的两个性质可用图2说明，箭头表示前一个空间是如何被映射到后一个子空间的。例如 $H^1(v)$ 通过梯度算子映射到 $H(\nabla\times; v)$ 的象是 $\nabla\varphi$ 所在的空间，$\nabla\varphi$ 这部分空间通过旋度算子映射到 $H(\nabla\cdot; v)$ 中成为一点，即体现了性质(1).



$\varphi\in H^1(v)$; $\mathbf{F}\in H(\nabla\times; v)$; $\mathbf{G}\in H(\nabla\cdot; v)$

图 2 de Rham 组合体的性质示意

2 位函数 T、Ω 的存在性

涡流场的求解区域通常由导电区与非导电区构成，导电区内可能存在多种导电媒质。为

避免不必要的复杂性，设求解场域由图3所示。其中 v是简单的连通域，v_{c1} 和 v_{c2} 是不同的两导电区(即导电区 $v_c = v_{c1} + v_{c2}$)，v_3 为非导电区，∂v_{c12} 是两种不同导电媒质的交界面，∂v_c 是导电媒质与非导电媒质的交界面，∂v是包围 v的边界，$\boldsymbol{n}_{12}$、$\boldsymbol{n}_{23}$、$\boldsymbol{n}$分别为三个界面的法向单位矢量。

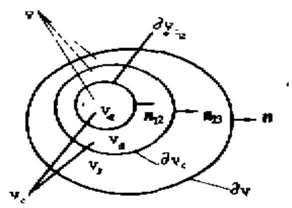


图3　涡流场的求解区域

在忽略位移电流的情况下，设电流密度 $\boldsymbol{J}$和磁场强度 $\boldsymbol{H}$满足下述方程：

$$\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{L}^2(0, T; H(\nabla \cdot; v)) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{L}^2(0, T; H(\nabla \times; v)) \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \qquad \text{in}(0, T) \times v_c \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}(\text{或}\quad 0) \qquad \text{in}(0, T) \times v_c(\text{或}\quad v_3) \tag{4}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{J}\right) + \frac{\partial(\mu \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0 \qquad \text{in}(0, T) \times v_c \tag{5}$$

$$\nabla \cdot (\mu \boldsymbol{H} = 0 \qquad \text{in}(0, T) \times v \tag{6}$$

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{on}(0, T) \times \partial v_c \;\&\; \text{on}\ (0, T) \times \partial v_{c12} \tag{7}$$

$$\mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{on}(0, T) \times \partial v_c \;\&\; \text{on}\ (0, T) \times \partial v_{c12} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{on}(0, T) \times \partial v \tag{9}$$

其中 μ和 σ分别为磁导率和电导率。由赫姆霍兹定理可知，满足方程(1)～(9)的 $\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{H}$有唯一解。引入位函数 $\mathbf{T}$、Ω，它们与 $\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{H}$之间的关系为[4]：

$$\boldsymbol{J} = \nabla \times \mathbf{T} \qquad \text{in}(0, T) \times v_c \tag{10}$$

$$\boldsymbol{H} = \mathbf{T} - \nabla \Omega \qquad \text{in}(0, T) \times v_c \tag{11}$$

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \Omega \qquad \text{in}(0, T) \times v_3 \tag{12}$$

下面利用 de Rham组合体的性质来证明位函数 $\mathbf{T}$、Ω是存在的。由于在单连通域 v_c 中 $\boldsymbol{J}$满足方程(1)、(3)和(7)，由组合体性质2可知，在$H(\nabla \times; v_c)$中必有一矢量场与散度算子的核 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ 对应，从而保证了满足式(10)的矢量位函数 $\mathbf{T}$的存在，以致

$$\mathbf{T} \in \boldsymbol{L}^2(0, T; H(\nabla \times; v_c)) \tag{13}$$

将式(10)代入方程(4)，得

$$\nabla \times (\boldsymbol{H} - \mathbf{T}) = 0 \qquad \text{in}(0, T) \times v_c$$

且

$$\boldsymbol{H} - \mathbf{T} \in \boldsymbol{L}^2(0, T; H(\nabla \times; v_c))$$

再由组合体性质1得知，在$H^1(v_c)$中必有一标量场与旋度算子的核 $\nabla \times (\boldsymbol{H} - \mathbf{T}) = 0$ 对应，这就保证了满足式(11)的标量位 Ω的存在，以致

$$\Omega \in L^2(0, T; H^1(v_c)) \tag{14}$$

在非导电区 v_3 中，因 $\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$，性质1同样保证了满足式(12)的 Ω存在，且

$$\Omega \in L^2(0, T; H^1(v_3)) \tag{15}$$

由式(14)和(15)可知，Ω 存在于整个场域 v 之中，即

$$\Omega \in L^2(0, T; H^1(v)) \tag{16}$$

至此，我们证明了在 $\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{H}$ 满足式(1) ~ (9) 的涡流场中，至少有满足式(10) ~ (13) 和 (16) 的一组位函数 $\mathbf{T}$、Ω 存在。

3 退化位 T 的唯一性

文献[5]从三维涡流密度 $\boldsymbol{J}$ 可以由二维矢量位函数 $\mathbf{T}$ 来获得的观点出发，提出了退化位概念，即场域内另有一处处不为零的矢量场 $\boldsymbol{w}$，在 v_c 内恒有 $\mathbf{T}\cdot \boldsymbol{w}=0$，满足这一条件的矢量位 $\mathbf{T}$ 称为退化位，$\boldsymbol{w}$ 的方向则为 $\mathbf{T}$ 的退化方向。我们将 $\boldsymbol{w}$ 指定为只含某一坐标方向的矢量函数，这时 $\mathbf{T}$ 就只有其它两个坐标分量，故可简化求解过程。

对图 3 所示的涡流问题，退化位 $\mathbf{T}$ 满足下列方程[1,6]

$$\nabla \times \mathbf{T} = \boldsymbol{J} \qquad \text{in}(0, T)\times v_c \tag{17}$$

$$\mathbf{T}\cdot \boldsymbol{w} = 0 \qquad \text{in}(0, T)\times v_c \tag{18}$$

$$\mathbf{T}\times \boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{on}(0, T)\times \partial v_c \tag{19}$$

文献[1]认为，满足式(17) ~ (19) 的退化位 $\mathbf{T}$ 不是唯一的，于是对 $\mathbf{T}$ 又另加了两条约束。然而，下面的证明将告诉我们，满足式(17) ~ (19) 的退化位 $\mathbf{T}$ 本身就有唯一解。

考虑到 $\mathbf{T}$ 只存在于导电媒质内，故 $\mathbf{T}$ 的唯一性证明仅限于导电区。设另有一退化位 $\mathbf{T}'$ 同时满足方程(17) ~ (19)，则有 $\nabla \times (\mathbf{T}-\mathbf{T}')=0$ 和 $(\mathbf{T}-\mathbf{T}')\cdot \boldsymbol{w}=0$，引入标量函数 ψ，且满足下列方程：

$$\mathbf{T}-\mathbf{T}' = -\nabla \psi \qquad \text{in}(0, T)\times v_c \tag{20}$$

$$\nabla \psi \cdot \boldsymbol{w} = 0 \qquad \text{in}(0, T)\times v_c \tag{21}$$

$$\psi = \text{const} \qquad \text{on}(0, T)\times \partial v_c \tag{22}$$

因为

$$\nabla\cdot(\psi^2 \boldsymbol{w}) = \nabla \psi^2\cdot \boldsymbol{w} + \psi^2\nabla\cdot \boldsymbol{w} = 2\psi\nabla\psi\cdot \boldsymbol{w} + \psi^2\nabla\cdot \boldsymbol{w} = \psi^2\nabla\cdot \boldsymbol{w}$$

对上式两边取体积分，并应用高散斯度定理[6]：

$$\int_{v_c}\psi^2(M)\nabla\cdot \boldsymbol{w}(M)\,\mathrm{d}v = \oint_{\partial v_c}[\psi^2(M)\boldsymbol{w}(M)]\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

其中 $M\in v_c$，在边界 ∂v_c 上 ψ 为常数，可令其为零，因此上式右边的面积分为零，则有：

$$\int_{v_c}\psi^2(M)\nabla\cdot \boldsymbol{w}(M)\,\mathrm{d}v = 0$$

因 $\boldsymbol{w}$ 为任意矢量场，$\nabla\cdot \boldsymbol{w}(M)$ 在 v_c 上有界、连续的条件是容易满足的，且 ψ^2 在 v_c 上不变号，将积分中值定理应用于上式有

$$\int_{v_c}\psi^2(M)\nabla\cdot \boldsymbol{w}(M)\,\mathrm{d}v = \nabla\cdot \boldsymbol{w}(P)\int_{v_c}\psi^2(M)\,\mathrm{d}v = 0$$

即

$$\int_{v_c}\psi^2(M)\,\mathrm{d}v = 0$$

其中 $P\in v_c$. 由于 ψ^2 非负，体积分为零，意味着被积函数 $\psi^2=0$，即 $\psi=0$. 于是有 $\nabla\psi=$

0，并由式(20)得知 $\mathbf{T}=\mathbf{T}'$，至此满足方程(17)～(19)的退化位 **T** 有唯一解得证。

标量位 $\boldsymbol{\Omega}$ 的唯一性已在许多文献中讨论过本文不再证明。

4　结　论

存在性与唯一性是位函数理论的基本内容，笔者从数学的角度，用线性函数空间理论证明了位函数 **T**、Ω 不但存在，而且在函数空间它们与场函数 **J**、**H** 有明确的对应关系。退化位的引入使寻求位函数唯一解的约束条件具有很大的灵活性，我们可以去寻找既能使问题简化，又能使解唯一的约束条件，而不必拘泥于规定矢量位函数的散度这种方式来获得唯一解。

参　考　文　献

[1] BROWN M L. Calculation of 3-dimensional eddy currents at power frequencies[J]. IEE Proc, 1982, 129: 46～53

[2] FERNANDES P. General approach to prove the existence and uniqueness of the solution in vector potential potential formulations of 3-D eddy current problems[J]. IEE Proc Sci Meas Technol, 1995, 142: 299～306

[3] GIRALUT T V. Finite element approximation of the Navier-Stokes equation, Lecture Notes in Mathematics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1979. 39～45

[4] ALBANESS R. Formulation of the eddy-current problem[J]. IEE Proc, 1990, 137(1): 16～22

[5] CARPTER C J. comparison of alternative formulation of 3-dimensional magnetic-field and eddy-current problems at power frequencies[J]. IEE Proc, 1977, 124(11): 1 026～1 034

[6] 复旦大学数学系. 数学分析：下册[M]. 上海：上海科学技术出版社，1978. 447～450

The Discussion of the Existence and Uniqueness of Potentials T、Ω in Eddy-current Fields

WANG Quan-di,　TAN Bang-ding,　JIANG Ke-xun

(College of Electrical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

ABSTRACT: The existence of the potential **T**、Ω is proved by using the theory of linear functional spaces. The uniqueness of withdrawal vector potential **T** is proved with a correct method. The appearance of withdrawal vector potential **T** shows that the unique solution of vector potentials obtained via defining its divergence is not a unique method.

KEYWORDS: function spaces; electromagnetic fields / potential method

（责任编辑　李胜春）