文章编号:1000－582x(1999)03-0063-04

⑪ 63－66

一种改进的二维有限元网格逐次细分法*

O242.21
TB115

李永明，俞集辉
(重庆大学 电气工程学院,重庆　400044)

摘　要:通过引入相关系数,解决了任意区域三角单元网格的逐次剖分过程中,单元细分后单元编号不连续的情况。采用相关系数法,可方便地对具有多种媒质区域的网格进行加密剖分。

关键词:有限元法;网格/逐次细分;相关系数
中图分类号:TB 115　　　　**文献标识码**:A

在有限元法计算中,将求解区域进行网格剖分是一项十分重要的前处理工作,在文献[1]的基础上、文献[2]给出了一个二维有限元网格的逐次细分法,即在输入最少量原始单元、节点编号及节点坐标信息的基础上,以三角单元各边中点为新增细分点,自动地将每个三角单元分成四个全等的三角单元,经过若干次细分后,便可得到满足足够计算精度所需的剖分单元。

然而,这种细分方法细分后节点编号没有经过优化(线性有限元外推插值方法正是以这种逐次细分方法为基础来建立待求区域的网格剖分的),单元编号十分混乱,在求解分片均匀媒质(特别是含有均匀非线性媒质)的边值问题时,同种媒质区域内单元不再能连续编号,这将导致编制的有限元计算程序十分复杂,为了解决这个难题,笔者在网格逐次细分中引入相关系数,并给出了一种更为一般的二维有限元网格的逐次细分法,使得网格细分后同性质区域内单元编号连续,并为高精度的有限元外推方法的推广使用创造有利条件。

1　三角单元的细分

1.1　相关系数

为了使在分片均匀边值问题的求解中具有相同性质的区域剖分单元编号连续,笔者在对求解区域进行网格加密剖分之前引入"相关系数"。它是用一个数对将剖分的单元的某一边的两个节点联系起来,其目的是给细分过程一个识别号,使单元编号在加密剖分后在同种媒质中连续。

设 r, s 为三角剖分单元一边上的两个节点,且 $r < s$,则我们称 r, s 两点相关,并用相关系数"$G(r, s)$"来表示 r, s 的相关关系。

---

* 收稿日期:1998-01-06
作者简介:李永明(1964-),男,浙江宁波人、重庆大学博士生,从事电磁场理论及计算研究。

1.2 加密后节点编号

设需研究区域已被分割为 E个单元和P个节点的有限元网格,对每个单元,用直线连接三边中点,得到四个全等的三角形。设 e 为E中的一个单元,则上述过程如图 1,图 2 所示(节点编号 $\xi_1^e < \xi_2^e < \xi_3^e$, $\xi_1^e = \xi_4^e$).

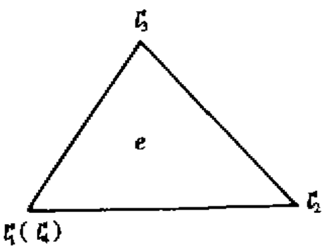

图 1 细分前某一单元

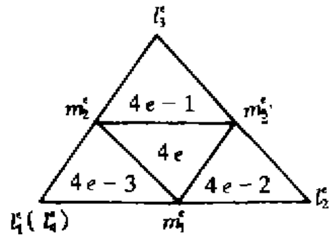

图 2 细分后某一单元

由于一次细分后,每边中点成为新的节点,所以新增加的节点数等于原来有限元网格中边的数目 L,根据拓扑学可知,对无孔洞的区域,有:

$$L = P + E - 1$$

由此可知,细分后有限元网格的节点总数为:

$$P' = P + L = 2P + E - 1$$

对于原来的 P个节点,其编号保持不变,对于新增加的 L个节点,在 $P+1$ 至 $P+L$ 范围内进行编号。对于每一单元,边上新增的节点是靠边的信息(两端点编号)来识别的,为了方便地确定三个新节点的总体编号,必须使新节点总体编号与边的信息之间存在简单的一一对应关系。

对细分前的网格中的每条边,均用两端点编号从小到大的顺序组成的数组来表示。如某边的一个端点编号为 r,另一端点编号为 $s(s > r)$,则该边用(r, s)来表示,并称端点 r 为始点,端点 s 为终点。这样,L条边便可用L个数对唯一地表示。

接着将 L 对边信息按终点号进行分组,终点号为 $i(i = 2, 3, \cdots, P)$ 的称第 i 组边信息。对同一组边信息,按始点号从小到大的顺序依次排列。将各组边信息按终点号增加的顺序依次排列,可得序列:

$$A_n = \{(r_1^{(i)}, i), \cdots, (r_{\beta_i}^{(i)}, i) \quad | i = 2, 3, \cdots, P\}$$

其中 $r_1^{(i)} < r_2^{(i)} < r_3^{(i)} < \cdots < r_{\beta_i}^{(i)}$ 表示第 i 组边信息的始点号, β_i 表示第 i 组边的数目。(显然, $\beta_1 = 0$, $L = \sum_{i=1}^{P} \beta_i$).

在终点编号指定时,与之相接的边可用始点号来表示,所以上述序列可用下列两个序列来代替:

$$A = \{r_1^{(i)}, \cdots, r_2^{(i)}, \cdots, r_{\beta_i}^{(i)} \quad | i = 2, 3, \cdots, P\}$$

$$D = \{d_1, d_2, \cdots, d_{P+1}\}$$

其中 $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_{P+1} = L + 1$, $d_m = d_{m-1} + \beta_{m-1}$, $(3 \leqslant m \leqslant P)$.

现根据序列 A对新节点进行编号。若某新节点对应的边信息在 A中的序号为K,则该新节点编号为 $P + K$.

设用数组 IA 存放序列 A，用数组 ID 存放序列 D. 根据数组 IA 和 ID，便可方便地确定任意一条边上新增加的节点编号。例如，对于边$(r, s)(s > r)$，根据数组 ID 可知 r 存放在数组 IA 中的地址范围为 $ID(s)—ID(s+1)-1$，将该范围内元素 $IA(K)$ 依次取出与 r 进行比较，如果 $IA(K) = r$，则边(r, s) 上新节点的编号为 $P + K$.

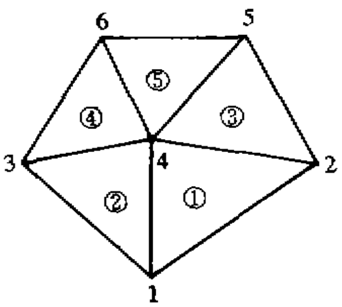

图 3　细分前单元及节点编号

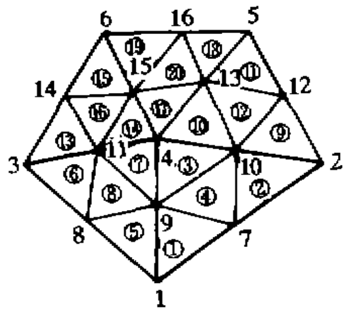

图 4　细分后单元及节点编号

例如，对图 3 所示的有限元网格，IA 和 ID 的内容分别为：

$$IA = (1,1,1,2,3,2,4,3,4,5)$$

$$ID = (0,1,2,3,6,8,11)$$

1.3　加密剖分前、后单元编号

虽然有限元法中的单元编号次序可以是任意的，但为了使计算程序简化，应将媒质参数相同(即同种材料)的单元连续编号，在同一种媒质中单元编号完后，再接下去对另一种材料中的单元进行连续编号。在引入相关系数后，则可对剖分区域的单元细分前、后自动按上述要求进行编号。

例如，对图 1 所示的任意单元 e(原单元编号)，细分后所得到的四个单元编号分别为：中间的单元编号取为 $4e$，其于 3 个单元从编号小的顶点开始，按顶点号增大的方向依次对新增单元编号：$e_1 = 4e-3$，$e_2 = 4e-2$，$e_3 = 4e-1$，图 2 则表示了每个细分单元的编号。

因而，如假设图 3 中单元①、② 所在区域的媒质系数与单元③、④、⑤ 所在区域不同，则细分后单元编号及节点编号如图 4 所示。

1.4　细分算法

根据以上所述形成的三角单元细分算法如下：

1) 将待细分的网格节点相关系数及所有边信息存入数组 G, IA, ID 中.

2) 计算各边中点编号、坐标和确定新的相关系数。

对 $i = 1, 2, \cdots, P$，执行：

a) $K_1 = ID(i)$，$K_2 = ID(i+1) - 1$；

b) 对 $K = K_1, K_1 + 1, \cdots, K_2$ 执行：

$j \Leftarrow IA(K)$，$m \Leftarrow P + K$，$x_m \Leftarrow (x_i + x_j)/2$，$y_m \Leftarrow (y_i + y_j)/2$；

c) 确定新的相关系数 $G(i, m)$，$G(j, m)$；

3) 细分后单元编号。

在采用了相关系数后，网格细分前的网格单元是自动编号的，而细分后、新的有限元网格是按下述规律进行自动编号的：

$e_0 \Leftarrow 4e$, $e_i \Leftarrow 4(e-1)+i$ ($i = 1,2,3$, e 为细分前某一单元的编号).

4) 细分后网格节点总数和单元总数分别为:

$P' = 2P + E - 1$, $E' = 4E$

5) 如果继续细分,则从(1)开始重复执行各步。

对于无孔洞的剖分区域,经过 k 次细分后,单元总数和节点总数分别为:

$$E_k = 4^k E, \quad P_k = 2^k P + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1}(4^{k-j} E - 1)$$

2 结 论

笔者针对实际场计算中分区均匀的情形,对二维有限元逐次细分法进行了改进,使之更加完善。并将这种方法应用到有限元外推插值法的前处理中,取得了令人满意的结果,体现了相关系数的引入在网格逐次剖分中确定单元编号时的重要性和实用性。

但是,由于在确定新增节点过程中,节点的编号是非优化的,因而由此形成的有限元刚度矩阵的带宽非常大,这是它的不足之处。而当解有限元方程采用迭代法时,因只存储系数矩阵中的非零元素,而非零元素个数与节点编号无关,所以节点编号的这点不足可以不进行调整。

笔者给出的方法可推广到三维的情形。

参 考 文 献

[1] 盛剑霓.工程电磁场数值分析[M].西安:西安交通大学出版社,1991.233~236

[2] 李新.一个二维有限元网格的逐次细分法[J].哈尔滨电工学院学报.1991,14(3):238~242

An Improvement on the Gradual Subdivision of 2D Finite Element Mesh

LI Yong-ming, YU Ji-hui

(College of Electrical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

ABSTRACT: In order to solve the uncontinuity of element numbering after the gradual subdivision of the triangular meshes, the correlation coefficient are introduced in this paper. It is easy to refine a multimedia-domain by using this method.

KEYWORDS: finite element methods; meshes / gradual subdivision; correlation coefficient

(责任编辑 李胜春)