

文章编号:1000-582x(1999)03-0097-05

①  
97-101

## 液饱和多孔固体层中的洛夫型波

刘占芳, 李德源, 严波

(重庆大学 建筑工程学院, 重庆 400044)

0347.4

**摘要:**研究了附着于一个半无限弹性体上的一个流体饱和的两相多孔固体薄层中的洛夫型波,导出了复数形式的弥散方程,此方程描述了相速度以及洛夫型波的衰减对频率的依赖。

**关键词:**饱和多孔固体;洛夫型波;弥散方程

**中图分类号:** O 33

**文献标识码:** A

弹性体  
液饱和多孔介质

对洛夫波的研究最早可追溯到地震时存在着相当大的横向位移分量,由于瑞利波仅在铅直面内传播,所以这种强烈的水平分量并非瑞利波的性质所致,而且,表面剪切波也不可能产生这种扰动。洛夫意识到地层中的实际条件在某些基本方面并非各向同性的和均匀的半空间,并且成功地描述了这种现象。他进一步设想这种扰动是地壳成层结构的一个结果,为此洛夫提出了一种模型,即一个弹性薄层附着于半无限弹性体,两者具有不同的材料性质。洛夫揭示了一种后来以他名字命名的横向的表面波,他指出,这种横向的表面波由集中于表面附近的剪切波所构成且其能量集中于表面,其相速度和波数取决于频率。由于对薄层及半无限体所作的弹性假设,我们认为洛夫波是以恒振幅传播的,更有趣的是忆及剪切波的相速度要超过弹性薄层中的相速度<sup>[1]</sup>。

在地震工程领域,更具有重要实际意义的是考察由一种流体饱和的多孔弹性固体组成的多孔介质层中的洛夫型波。Deresiewicz<sup>[2]</sup>首先应用 Biot<sup>[3]</sup>的模型研究了这种多孔介质层中的洛夫型波,这个模型在描述多孔介质层及半无限体时,仍然保留了洛夫所作的弹性处理。Deresiewicz 推导了关于洛夫型波传播的频率和相速度的复数形式的弥散方程,为了确定相速度和衰减系数,在某些简化情况下必须采用近似处理。

尽管文献中采用 Biot 的模型解决多孔材料中波的传播和动力响应的问题取得了很好的结果,但这种模型处理饱和多孔介质在某些方面并不令人满意。Biot 模型的最根本的缺陷在于其理论基础没有建立在力学和热力学的基本原理之上,一个例子是该模型将孔隙度的演化简单处理为常数,详细的讨论可参阅 de Boer<sup>[4]</sup>的工作。

笔者的目的在于采用一种完善的多孔介质模型来研究液饱和的多孔介质层中的洛夫型

• 收稿日期:1998-07-02

基金项目:国家自然科学基金资助项目(19402020)

作者简介:刘占芳(1963-),男,黑龙江哈尔滨市人,重庆大学机械传动国家重点实验室研究人员、教授。

波,该多孔介质层是由一个连续的孔隙内充满理想液体的多孔弹性固体组成。为了把所得结果能够与 Deresiewicz 的结果进行比较,同样假设多孔层下面为半无限弹性体。

## 1 基本场方程

对多孔介质进行理论描述人们已经作出了巨大的努力,在众多的多孔介质模型中,首先由 Fillunger<sup>[5]</sup>提出后经 de Boer<sup>[6]</sup>进一步发展的一种模型得到广泛认可。早在 30 年代 Fillunger 就提出了一种包含不可压液体和不可压固体的二元模型,该模型包括了描述一维运动的质量和动量平衡方程。然而,Fillunger 对多孔介质理论的创造性的研究却很少被文献引用,直到最近,他对多孔介质理论的贡献才由 de Boer<sup>[4]</sup>进行了详尽的回顾。de Boer<sup>[6]</sup>采用混合物理论和体积分数的概念对他的理论作了进一步的改进之后,这个模型特别适合于微观不可压的两相多孔材料的理论分析。Bowen<sup>[7]</sup>应用混合物理论也提出了一个不可压多孔介质模型,但由于他引入了过多的变量,如平均速度和化学势能张量等,使其模型的实际运用受到很大的限制。Mow 等<sup>[8]</sup>在生物力学上也运用了多孔介质模型。至于可压多孔介质模型,一直存在大量的争论,许多学者在本领域作出了贡献,限于篇幅,在此不予详细讨论。

作者运用上述不可压多孔介质模型来考察洛夫型波在两相饱和多孔介质层中的传播。这里,不可压意指组成介质的两种组份的真实密度为常数,但体积分数或孔隙度可随变形而变化。事实上,由于真实密度相对体密度的变化而言可以忽略,因此所谓不可压是对实际条件的充分合理的近似处理。作者所研究的问题不考虑温度的变化和质量交换,且对象为一个孔隙内充满理想液体的多孔弹性固体,详细的推导可参阅 de Boer<sup>[6]</sup>和 de Boer 等<sup>[9]</sup>。所需的质量和动量平衡方程为:

$$\operatorname{div}\left(n^s \frac{\partial w^s}{\partial t} + n^l \frac{\partial w^l}{\partial t}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda^s + \mu^s) \operatorname{grad} \operatorname{div} w^s + \mu^s \operatorname{div} \operatorname{grad} w^s - n^s \operatorname{grad} p + \\ & \rho^s \left( b - \frac{\partial^2 w^s}{\partial t^2} \right) + \alpha_v \left( \frac{\partial w^l}{\partial t} - \frac{\partial w^s}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$- n^l \operatorname{grad} p + \rho^l \left( b - \frac{\partial^2 w^s}{\partial t^2} \right) + \alpha_v \left( \frac{\partial w^l}{\partial t} - \frac{\partial w^s}{\partial t} \right) = 0 \quad (3)$$

在上述方程中,  $n^l$  和  $n^s$  分别表示受饱和条件约束的液体和固体的体积分数。在小变形的情况下,体积分数等于其变形前的值(de Boer 等<sup>[10]</sup>)。  $\rho^l$  和  $\rho^s$  是宏观密度函数(体密度)并有,  $\rho^l$  和  $\rho^{lR}$  ( $k = S, \text{solid}; L, \text{liquid}$ ),  $\rho^{SR}$  和  $\rho^{lR}$  是不变的微观质量密度(真实密度)。  $b$  是外部加速度,  $p$  表示液体的孔隙压力,参数  $\mu^s$  和  $\lambda^s$  是空的多孔固体的宏观拉梅常数。  $w^l$  和  $w^s$  分别表示液体和固体的位移向量。在各向同性渗透条件下,参数  $\alpha_v$  表达了固-液两相间的耦和作用系数<sup>[10]</sup>。

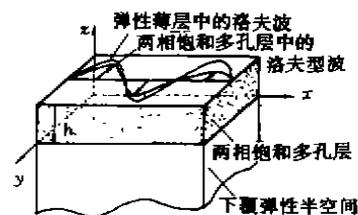


图1 两相饱和多孔层中洛夫型波的传播和衰减特性

## 2 洛夫型波的传播

下面考察在一个厚度为  $h$  的附着在各向同性、均匀的半无限弹性体上的固-液两相饱和多孔层中洛夫型波的传播, 建立如图 1 所示的笛卡尔坐标系, 其中  $xy$  平面在多孔层与弹性体之间的水平界面上,  $z$  轴垂直向上。参照所建立的坐标系和洛夫型波的剪切特性, 可以给出液体和固体两相的位移分量及孔隙压力如下:

$$\begin{aligned} u^s &= 0, v^s = v^s(x, z, t), w^s = 0, \\ u^l &= 0, v^l = v^l(x, z, t), w^l = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$p = p(x, z, t) \quad (5)$$

考虑到剪切扰动不会引起体积的变化, 所以在多孔介质的控制方程组中可以消去质量平衡方程。进一步忽略外部体力的影响, 并令固体和液体的位移为简谐时间变化, 则:

$$v^s = \bar{v}^s(x, z) \exp(i\omega t), \quad v^l = \bar{v}^l(x, z) \exp(i\omega t) \quad (6)$$

那么将(4~6)代入运动方程(2~3)有:

$$(\nabla^2 + \delta_1^2) \bar{v}^s = 0 \quad \bar{v}^l = (\alpha^* i) / [(a_n i - \rho^l \omega) v^s] \quad (7)$$

上式中  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$  是拉普拉斯算子, 并且:

$$\delta_1^2 = S_1 - S_2 i \quad (8)$$

$$S_1 = [\rho^s \alpha_v^2 \omega + \rho^l \alpha_v^2 \omega + \rho^s (\rho^l)^2 \omega^4] / \{\mu^s [\alpha_v^2 + (\rho^l)^2 \omega^2]\} \quad (9)$$

$$S_2 = [(\rho^l)^2 \alpha_v^2 \omega^3] / \{\mu^s [\alpha_v^2 + (\rho^l)^2 \omega^2]\} \quad (10)$$

即, 具复数  $\delta_1$  的方程(7) 决定了固体骨架位移的空间依赖部分, 这表明, 一方面液饱和多孔固体层中的洛夫型波是耗散的, 另一方面, 方程(7) 也表明液体和固体中的洛夫型波是相互耦合的。我们把复数  $\delta_1$  进一步写为:  $\delta_1 = Z_1 + Z_2 i$  (11)

由于很明显的物理原因, 令  $Z_1 > 0, Z_2 > 0$ , 因为前者联系着相速度而后者联系着波的衰减, 因此, 容易得到:

$$Z_1^2 = (\sqrt{S_1^2 + S_2^2} + S_1) / 2 \quad (12)$$

$$Z_2^2 = (\sqrt{S_1^2 + S_2^2} - S_1) / 2 \quad (13)$$

设方程(7) 的解为:  $\bar{v}^s = f(z) \exp(i\gamma x)$  (14)

则将此解代入(7) 中可得:

$$f(z) = A_1 \cos k_1 z + A_2 \sin k_1 z, \quad k_1^2 = \delta_1^2 - \gamma^2 \quad (15)$$

联系(6) 及(14) 和(15), 饱和多孔介质层中固体骨架的位移为:

$$v^s = (A_1 \cos k_1 z + A_2 \sin k_1 z) \exp(\omega t - \gamma x) i \quad (16)$$

与饱和多孔介质层一样, 对其下的半无限弹性空间, 令  $v_2$  表示水平位移分量, 其依赖于空间变化的部分由亥姆霍兹方程确定, 即:

$$(\nabla^2 + \delta_2^2) \bar{v}_2 = 0 \quad (17)$$

其中:

$$\delta_2^2 = \omega^2 / c_2^2 \quad c_2^2 = \mu / \rho \quad (18)$$

这里  $\mu$  是弹性基础的剪切模量,  $\rho$  是其密度。

类似地, 位移  $v_2$  的解为:

$$v_2 = A_3 \exp(k_2 z) \exp(\omega t + \gamma x) i \quad (19)$$

上式中:  $k_2^2 = \gamma^2 - \delta_2^2 \quad \text{Re}(k_2) > 0$  (20)

当  $z = h$  时满足液饱和和多孔介质薄层表面自由应力的条件以及剪切应力和位移在界面处  $z = 0$  为连续, 则:

$$\mu^s \frac{\partial w^s}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad \mu^s \frac{\partial w^s}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mu \frac{\partial v_h}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad v^s \Big|_{z=0} = v_h \Big|_{z=0} \quad (21)$$

上面的表达式表明, 固体骨架构成了液饱和和多孔介质的基本框架并承受外部作用力而非孔隙中的液体。借助(16)及(19)两式和给定边界条件(21)式, 得到一组关于振幅的代数方程

$$\sin(k_1 h) A_1 - \cos(k_1 h) A_2 = 0 \quad (22)$$

$$\mu^s k_1 A_2 - \mu k_2 A_3 = 0 \quad (23)$$

$$A_1 - A_3 = 0 \quad (24)$$

该代数方程组有非零解的唯一条件是振幅的系数行列式等于零, 由此可得弥散方程:

$$\tan(k_1 h) = (\mu k_2) / (\mu^s k_1) \quad (25)$$

由于洛夫型波的波数  $\gamma$  为复数, 则振幅受一个依赖于频率的空间衰减特性控制, 参见图 1。表达式(25)表示相速度和衰减系数依赖于频率  $\omega$ , 它是一个超越方程, 需要用数值方法求解。由于正切函数解的多值性, 对任何一个给定的频率  $\omega$ , (25) 式存在多重根, 这样, 相应于各种传播模态, 弥散曲线和频率谱都具有多重性。

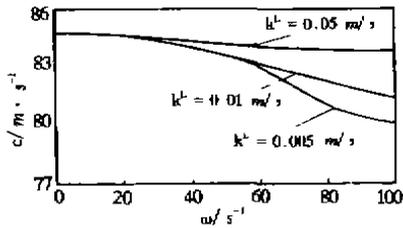


图 2 不同渗透系数下洛夫型波的相速度与频率的关系曲线

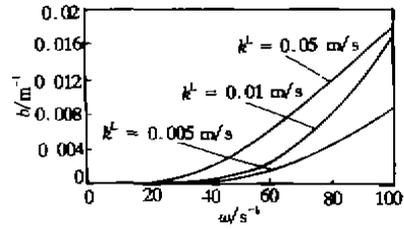


图 3 不同渗透系数下洛夫型波的衰减系数与频率的关系曲线

作为一个算例, 下面考察一个饱水土的薄层迭加在一个弹性半空间上, 弹性基的剪切波传播速度为 84.76 m/s, 饱水土的物理特性见表 1, 计算中选取(25)式的多重根的第一个根。图 2 和图 3 分别表示了洛夫型波的第一种模式的传播速度和衰减系数与频率的关系曲线。

表 1 两相饱和和多孔介质的材料特性

$n^s = 0.67$	$n^l = 0.33$
$\rho^s = 1.34 \text{ mg/m}^3$	$\rho^l = 0.33 \text{ mg/m}^3$
$\lambda^s = 5.5833 \text{ MN/m}^2$	$\mu^s = 8.3750 \text{ MN/m}^2$
$\gamma^R = 10.0 \text{ kN/m}^3$	$h = 1.2 \text{ m}$

注意到当多孔固体框架中没有液体时, 则  $\alpha_0 = 0$ , 根据式 (15) 和式 (20) 有:

$$k_1^2 = \gamma^2 \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) \quad k_2^2 = \gamma^2 \left( 1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) \quad c_2 > c > c_1 \quad (26)$$

其中:

$$c_1^2 = \mu^s / \rho^s \quad (27)$$

它是在一个饱和多孔弹性固体中剪切波的传播速度<sup>[10]</sup>。由式(25)得:

$$\mu \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} - \mu^s \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \tan\left(\gamma h \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1}\right) = 0 \quad (28)$$

此即洛夫给出的经典弹性理论的解<sup>[1]</sup>。

洛夫型波在多孔介质薄层中的传播是非常复杂的,在地震勘测研究和超声波领域是非常重要的。作者从一个完善的不可压模型出发,建立一个两相多孔层中洛夫型波的理论描述。由于洛夫型波的剪切特性,作者没有包括孔隙压力和体积分数(孔隙率)的变化。所导出的复数形式的弥散方程描述了相速度和衰减系数对频率的依赖关系。

### 参 考 文 献

- [1] LOVE A E H. Some problems of geodynamics. [M] Cambridge University Press, 1926
- [2] DIERESIEWICZ H. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid filled porous solid, II. Love waves in a porous layer. [J] Bull Seism Soc Am, 1961, 51: 51~59
- [3] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid, I. Low frequency range. [J] J Acoust Soc Am, 1956, 28(2): 168~178 de Boer R. Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory. [J] Appl. Mech Rev, 1996, 49(4): 201~262
- [5] FILLUNGER P. Erdbaumechanik?, [M] Wien: Selbstverlag des Verfassers, 1936 de Boer R. Compressible and incompressible porous media - a new approach. [C] Report MECH 92/1, Universitar - GH Essen, 1992
- [7] BOWEN R M. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. [J] Int J Engng Sci, 1980, 18: 1129~1148
- [8] MOW V C, KUEI S C, LAI W M et al. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiments. [J] J Biomechanical Engng, 1980, 102: 73
- [9] DE BOER R, EHLERS W. Uplift, friction and capillarity - three fundamental effects for liquid - saturated porous solids. [J] Int J Solids Structure, 1990, 26: 43~57
- [10] DE BOER R, LIU ZHANFANG. Plane waves in a semi - infinite fluid saturated porous medium. [J] Transport in Porous Media, 1994, 16: 147~173

## Love-type Waves in a Liquid-saturated Porous Solid Layer

LIU Zhan-fang, LI De-yuan, YAN Bo

(College of Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**ABSTRACT:** An investigation is made of Love-type waves in a two-phase liquid-saturated poro-elastic solid layer attached to the surface of a semi-infinite elastic body. The complex dispersion equation is derived describing dependence of phase velocity and attenuation of Love-type waves on frequency.

**KEYWORDS:** saturated porous solid; Love-type waves; dispersion equation

(责任编辑 钟学恒)