文章编号：1000－582x(1999)04-0120－06

24

120－125

单位圆内亚纯函数的辐角分布*

O174.52

韩润生，顾永兴
（重庆大学 理学院，重庆　400044）

摘　要：研究了单位圆内 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 级亚纯函数涉及导数、重值及小函数的 Hayman 方向的存在性问题，证明了类似于平面上的亚纯函数辐角分布的结果。

关键词：奇异方向；小函数；重值

单位圆　亚纯函数
辐角分布

中图分类号：O 174.52　　　　**文献标识码**：A

0　引言及主要结果

在 1979 年顾永兴[1]证明了 Hayman 的重要猜想后，张庆德与杨乐[2]获得了相应的奇异方向，即 Hayman 方向。随后对 Hayman 方向的研究又得到了一系列的结果[3~7]，其中文[3]得到了下面的定理：

定理 A　设 $f(z)$ 为开平面上的亚纯函数，级 λ 为有穷正数，则存在一条从原点出发的半直线 $\triangle$：$\arg z=\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 具有如下性质：对任意正数 ε，任意正整数 k，以及任意两个有穷复数 a，$b(b\neq 0)$ 有：

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\{n(r,\theta,\varepsilon,f=a)+n_{k+4+\left[\frac{2}{k}\right]}(r,\theta,\varepsilon,f^{(k)}=b)\}}{\log r}=\lambda$$

其中 $n_{k+4+\left[\frac{2}{k}\right]}(r,\theta,\varepsilon,f^{(k)}=b)$ 表示在 $\{z:|z|<r,|\arg z-\theta|<\varepsilon\}$ 内 $f^{(k)}(z)$ 的级不大于 $k+4+\left[\frac{2}{k}\right]$ 的 b- 值点数目。

文[6] 得到了下述结果：

定理 B　设 $f(z)$ 如定理 A 所设，$\alpha(z)$，$\beta(z)$ 为两个级小于 λ 的亚纯函数，$\beta(z)\neq 0$，$\beta(z)-\alpha^{(k)}(z)\neq 0$，则存在一条从原点出发的半直线 $\triangle$：$\arg z=\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 具有如下性质：对任意 $\varepsilon>0$，任意正整数 k，有：

---

* **收稿日期**：1998-07-15
作者简介：韩润生(1975-)，男，江苏人，重庆大学硕士研究生。

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\{n(r,\theta,\epsilon,f=\alpha(z))+n_{3k+4}(r,\theta,\epsilon,f^{(k)}=\beta(z))\}}{\log r}=\lambda$$

笔者的目的主要是把定理A、B推广到单位圆内，我们证明了：

定理1　设 $f(z)$ 为单位圆内 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 级亚纯函数，则存在 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 使得对任意 $\epsilon>0$，任意两个单位圆内的级小于 ρ 的亚纯函数 $\alpha(z)$，$\beta(z)$，$\beta(z)\not\equiv 0$，$\beta(z)\not\equiv\alpha^{(k)}(z)$ 及任意正整数 k 有：

$$\overline{\lim_{r\to 1^+}}\frac{\log\{n(r,\theta,\epsilon,f=\alpha(z))+n_{3k+4}(r,\theta,\epsilon,f^{(k)}=\beta(z))\}}{\log r}=\rho+1$$

定理2　设 $f(z)$ 如定理1所设，则存在 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$，使得对任意 $\epsilon>0$、任意有穷复数 a、$b(b\neq 0)$ 及任意正整数 k 有：

$$\overline{\lim_{r\to 1^+}}\frac{\log\{n(r,\theta,\epsilon,f=a)+n_{k+4+\left[\frac{2}{k}\right]}(r,\theta,\epsilon,f^{(k)}=b)\}}{\log r}=\rho+1$$

1　定义及几个引理

为了证明以上的定理需要以下的一个定义及三个引理。

定义　设 $f(z)$ 为单位圆内 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 级亚纯函数，称圆序列 $\Gamma_n=\{|z-z_n|<h_n\}$ 为 $e^{i\theta}$ 附近的 $\rho+1$ 级充满圆序列，其中 $z_n=r_ne^{i\theta_n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=1$，$(r_n<1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 且满足：

1) 记 $k\Gamma_n=\{|z-z_n|<kh_n\}$，对 $\forall k>0$，$\exists N$，当 $n\neq m\geqslant N$ 后有：

$$k\Gamma_m\cap k\Gamma_n=\varphi\qquad k\Gamma n\subset\{|z|<1\}$$

2) $r_n\leqslant r_{n+1}$，$\dfrac{1}{1-r_n}\sim\dfrac{1}{1-r_{n+1}}$，$\dfrac{4(1-r_n)}{\ln\dfrac{1}{1-r_n}}\geqslant h_n\geqslant\dfrac{1-r_n}{4\ln\dfrac{1}{1-r_n}}$，$n\leqslant\left(\ln\dfrac{1}{1-r_n}\right)^3$；

3) $\forall\epsilon>0(0<\epsilon<\rho)$，对充分大的 n 有 $n(\Gamma_n,f=a)\geqslant T_m=\left(\dfrac{1}{1-r_n}\right)^{\rho-\epsilon}$，$a$ 为任意复数，至多除去两个半径为 e^{-T_m} 的球面小圆内的复数，记这两个球面除外圆为 S_n、S'_n；

4) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\log\sum\limits_{j=1}^{n}n(\Gamma_j,f=a_j)}{\log\dfrac{1}{1-r_n}}=\rho+1$，$\{a_j\}$ 为任意一列复数且不属于各自的除外小圆。

引理1[9]　设 $f(z)$ 为单位圆内 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 级亚纯函数，则 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上至少存在一个 Borel 点；

引理2[10]　设 $f(z)$ 如引理1所设，$e^{i\theta}$ 为 $f(z)$ 的一个 Borel 点，则 $f(z)$ 在 $e^{i\theta}$ 点附近存在满足定义的 $\rho+1$ 级充满圆序列。

定义的充满圆序列与文[10]略有不同,但从它的证明中可以直接得到所要的结果。

引理 3[8] 设 $f(z)$ 如引理 1 所设, $\varphi_i(z)(i=1,2,3)$ 为单位圆的三个级小于 ρ 的互不相等的亚纯函数,则存在 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 使得对任意 $\varepsilon>0$ 有:

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\log\left\{\sum_{i=1}^{n} n(r,\theta,\varepsilon,f=\varphi_i(z))\right\}}{\log\frac{1}{1-r}}=\rho+1$$

2 定理的证明

定理 1 的证明:

由引理 3, $\exists\ \theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$ 满足引理 3 的要求,现证明这个方向 $\Delta:\arg z=\theta_0$ 具有定理要求的性质。反之,则存在 $\varepsilon_0>0$, 正整数 k 及级小于 ρ 的两个不恒等于 0 的亚纯函数 $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\beta(z)\not\equiv\alpha^{(k)}(z)$, 使得当 r 充分接近 1 后有: $\exists\ \tau(0<\tau<\rho+1)$, 使得:

$$[n(r,\theta_0,\varepsilon_0,f=\alpha(z))+n_{(3k+4)}(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(k)}=\beta(z))<\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\tau} \tag{1}$$

令 $$g(z)=f(z)-\alpha(z),\ \varphi(z)=\beta(z)-\alpha^{(k)}(z)$$

则 $g(z)$ 仍为级为 ρ 的亚纯函数,且方向 $\Delta:\arg z=\theta_0$ 仍为 g 的 Borel 方向,于是由引理 2 可知存在一列圆 $\Gamma_n=\{|z-z_n|<h_n\}$, $z_n=r_ne^{i\theta_n}$ 满足定理 1 的要求,于是存在 m_0 使得当 $m\geqslant m_0$ 时有 $64\Gamma_n\subset\{|\arg z-\theta_0|<\varepsilon_0\}$ 且 $64\Gamma_n\cap 64\Gamma_m=\varnothing(m\neq n\geqslant m_0)$.

置 $G_n(t)=\dfrac{g(z_n+64h_nt)}{(64h_n)^k}$ $\quad\Phi_n(t)=\varphi(z_n+64h_nt)\quad(|t|<1)$

则 $$N\triangleq n(|t|<1,G_n=0)+n_{(3k+4)}(|t|<1,G_n^{(k)}=\Phi_n)=[n(64\Gamma_n,g=0)+n_{(3k+4)}](64\Gamma_n,g^{(k)}=\varphi)$$

置 $N'=n(1,\Phi_n)+n\left(1,\dfrac{1}{\Phi_n}\right)$, 则由 Boutrovx-Cartan 引理存在一组个数不超过 N' 的圆 (γ_1), 其直径之和不超过 $\dfrac{1}{1024}$, 使得当 $t\notin(\gamma_1)$ 有:

$$\prod_{\substack{\Phi(\tau)=0\text{或}\infty\\|\tau|\leqslant 1}}\frac{1}{|t-\tau|}\leqslant(4096)^{N'} \tag{3}$$

$$\sum_{\substack{\Phi(\tau)=0\text{或}\infty\\|\tau|\leqslant 1}}\frac{1}{|t-\tau|}\leqslant(4096)^{N'}(\log N'+1) \tag{4}$$

令 $z=z_n+64h_n(t)$, 则由 Poission-Jensen 公式可得:

$$\log|\Phi_n(t)|=\log|\varphi(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varphi(Re^{i\theta})|\frac{R^2-|z|^2}{R^2+|z|^2-2R|z|\cos(\varphi-\theta)}d\theta-$$

$$\sum_{\substack{\varphi(\alpha)=0\\|\alpha|\leqslant R}}\log\left|\frac{R^2-\bar{\alpha}z}{R(z-\alpha)}\right|+\sum_{\substack{\varphi(\beta)=\infty\\|\beta|\leqslant R}}\log\left|\frac{R^2-\bar{\beta}z}{R(z-\beta)}\right|\qquad(z=|z|e^{i\varphi}) \tag{5}$$

由(5)还可得:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varphi(Re^{i\theta})|\frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^2}d\theta+\sum_{\substack{\varphi(\alpha)=0\\|\alpha|\leqslant R}}\left(\frac{1}{z-\alpha}+\frac{\bar{\alpha}}{R^2-\bar{\alpha}z}\right)-$$

$$\sum_{\substack{\varphi(\beta)=\infty\\|\beta|\leqslant R}}\left(\frac{1}{z-\beta}+\frac{\bar\beta}{R^2-\bar\beta z}\right) \tag{6}$$

$$\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varphi(Re^{i\theta})|\frac{4Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^3}d\theta-\sum_{\substack{\varphi(\alpha)=0\\|\alpha|\leqslant R}}\left[\frac{1}{(z-\alpha)^2}-\frac{|\alpha|^2}{(R^2-\bar\alpha z)^2}\right]+$$

$$\sum_{\substack{\varphi(\beta)=\infty\\|\beta|\leqslant R}}\left[\frac{1}{(z-\beta)^2}-\frac{|\beta|^2}{(R^2-\bar\beta z)^2}\right] \tag{7}$$

再令 $a=z_n+64h_n\tau$，其中 a 表示 $\varphi(z)$ 的零点和极点，τ 表示 $\Phi_n(t)$ 的零点和极点，则当 $|t|\leqslant\frac{1}{2}$，$t\notin(r_1)$ 时，由(3)～(7)，并取 $R=r_n+65h_n$，经过简单计算有：

$$|\log|\Phi_n(t)||\leqslant\left(n(R,\varphi)+n\left(R,\frac{1}{\varphi}\right)\right)\left(\log\frac{1}{h_n}+\log 2+\log 4096e\right)+$$

$$\frac{1}{h_n}\left[m(R,\varphi)+m\left(R,\frac{1}{\varphi}\right)\right] \tag{8}$$

此外 $\left|\frac{\Phi'_n(t)}{\Phi_n(t)}\right|=\left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\cdot 64h_n$，由(6) 式经过计算有：

$$\left|\frac{\Phi'_n(t)}{\Phi_n(t)}\right|\leqslant\frac{128}{h_n}\left[m(R,\varphi)+m\left(R,\frac{1}{\varphi}\right)\right]+$$

$$\left[n\left(R,\frac{1}{\varphi}\right)+n(R,\varphi)\right](64+\log 2+\log 4096e) \tag{9}$$

再根据 $\left|\left(\frac{\Phi'_n(t)}{\Phi_n(t)}\right)'\right|=\left|\left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)'64h_n\right|$ 及(7) 可得：

$$\left|\frac{\Phi'_n(t)}{\Phi_n(t)}\right|\leqslant\frac{256}{h_n^2}\left[m(R,\varphi)+m\left(R,\frac{1}{\varphi}\right)\right]+$$

$$\frac{1}{64h_n}\left[n(R,\varphi)+n\left(R,\frac{1}{\varphi}\right)\right](64+\log 2+\log 4096e) \tag{10}$$

令

$$\log H=\frac{128}{h_n}\left[m(R,\varphi)+m\left(R,\frac{1}{\varphi}\right)+1\right]+100\left[n(R,\varphi)+\left(R,\frac{1}{\varphi}\right)\right]$$

则由(8)～(10) 可得：

$$|\log|\Phi_n(t)||\leqslant\log H \tag{11}$$

$$\left|\frac{\Phi'_n(t)}{\Phi_n(t)}\right|\leqslant\log H \tag{12}$$

$$\left|\frac{\Phi''_n(t)}{\Phi_n(t)}\right|\leqslant\left|\frac{\Phi'_n(t)}{\Phi_n(t)}\right|+\left|\frac{\Phi'_n(t)}{\Phi_n(t)}\right|^2\leqslant(\log H)^2 \tag{13}$$

所以在 $|t|\leqslant 1$ 内[6] 中引理3的要求全部满足。由[6] 引理3，存在点 z_{on} 及 ξ_n，$|z_{on}|<$

$\frac{3}{64}$, $|\xi_n| < \frac{3}{64}$, 其中 z_{n} 到 $G_n(t)$ 在 $|t| \leqslant 1$ 中零点距离全大于 $\frac{1}{1024(N+1+\log(1024H))}$,

使得对一切复数 a_n, $a_n = \frac{a}{(64h_n)^k}$ 有:

$$n\left(\frac{1}{64}, G_n = a_n\right) \leqslant k\{(N_n + N''_n + \log H)[\log(N_n + N''_n + 2)]^2 +$$
$$\log H + \log^+\log^+\frac{1}{|G(z_{on})|} + \log\frac{1}{|G(\xi_n), a_n)|}\Big\} \tag{14}$$

其中 $N_n = N$, $N''_n = N''$

于是

$$n(\Gamma_n, g = a) \leqslant k\{(N_n + N''_n + \log H)[\log(N_n + N''_n + 2)]^2 +$$
$$\log H + \log^+\log^+\frac{1}{|g(z'_{on})|} + \log\frac{1}{|G_n(\xi'_n), a_n)|}\Big\} \tag{15}$$

其中, $z'_{on} = z_n + 64h_nz_{on}$, z'_{on} 到 $64\Gamma_n$ 外 g 的零点距离大于 h_n, 到 $64\Gamma_n$ 内零点距离大于 $\frac{64h_n}{1024(N_n + 1024\log H)}$.

由 Poission-Jensen 公式及 r_n, h_n 是定义并注意到 g 的级为 ρ, 经过计算可得:

$$\log^+\log^+\frac{1}{|g(z'_{on})|} \leqslant K\log\frac{1}{1-r_n}\log\log\frac{1}{1-r_n} \tag{16}$$

由 H 的定义并顾及 $1 - R \geqslant (1-r_n)\left\{1 - \frac{4\times 65}{\log\frac{1}{1-r_n}}\right\} \geqslant \frac{1-r_n}{2}$ 可得

$$\log H \leqslant K\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\tau'} \qquad (0 < \tau' < \rho + 1) \tag{17}$$

将(16)、(17) 代入(15) 可得:

$$n(\Gamma_n, g = a) \leqslant$$
$$K\left\{\left(N_n + N''_n + K\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\tau'}\right)[\log(N_n + N''_n + 2)]^2 + \log\frac{1}{|g(\xi'_n), a|}\right\} \tag{18}$$

于是至多除去一个球面半径为 e^{-T_n} 的球面小圆 S''_n 后对任意 $a_n \notin (S_n \cup S'_n \cup S''_n)$ 有:

$$n(\Gamma_n, g = a_n) \leqslant K\left\{\left(N_n + N''_n + \left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\tau}\right)[\log(N_n + N''_n + 2)]^2 +\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\tau'}\right\} \qquad (\rho < \tau' < \rho + 1) \tag{19}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} n(\Gamma_j, g = a_j) \leqslant K\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(N_j + N''_j + \left(\frac{1}{1-r_j}\right)^{\tau}\right)[\log(N_j + N''_j + 2)]^2\right\} \tag{20}$$

又

$$\sum_{j=1}^{n} N_j = \sum_{j=1}^{n}[n(\Gamma_j, f = \alpha(z)) + n_{(3k+4)}(\Gamma_j, f^{(k)} = \beta(z)] <$$
$$\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\tau} \qquad (0 < \tau < \rho + 1) \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} N'_{i} < \sum_{j=1}^{n} (n(\Gamma_{j}, \varphi = 0) + n(\Gamma_{j}, \varphi = \infty)) < \left(\frac{1}{1 - r_n} \right)^{\tau} \tag{22}$$

且
$$n \leqslant \left(\log \frac{1}{1 - r_n} \right)^{3} \tag{23}$$

将(21)、(22)、(23) 代入(20) 最终可得：

$$\sum_{j=1}^{n} n(\Gamma_{j}, g = a_{j}) \leqslant K\left(\frac{1}{1 - r_n} \right)^{\tau'''} \qquad (0 < \tau''' < \rho + 1) \tag{24}$$

又 $\{a_j\}$ 不属于充满圆的各自的除外小圆，由(24) 可知与 $\{\Gamma_j\}$ 为 g 的 $\rho + 1$ 级充满圆矛盾!

定理 1 证毕。

利用[9] 中的定理 1 及 3 中引理 1，类似地我们可证明定理 2.

参　考　文　献

[1] 顾永兴．亚纯函数族的一个正规定则[J]．中国科学 1979 年数学专辑(Ⅰ).267～274.

[2] 张庆德，杨乐．亚纯函数的新奇异方向[J]．数学学报，83，11(11)：982～984.

[3] 杨乐，张庆德．亚纯函数及其导数的辐角分布[J]．数学学报，1986，5(3)：354～361.

[4] 顾永兴，龚向宏．关于 Hayman 方向[J]．中国科学 A 辑，1987，10：1019～1029.

[5] 龚向宏．亚纯函数及其微分多项式的奇异方向[J]．数学学报，1987，30(31).

[6] 韩润生，张兴明，顾永兴．On the singular direction of meromorphic function concerning derivatives, small function and multiple values. Proceedings of the fifth international Colloquium on Finite of Infinite Dimentional Complex Analysis[M]．北京：北京大学数学研究所出版社，1997，87～92.

[7] 顾永兴．亚纯函数的正规族[M]．成都：四川教育出版社，1991.

[8] TUSIJ M. Potential Theory in Modern Fanction Theory[M]. Moruzen, Tokyo, 1959.

[9] 孙道椿．关于 Borel 点的充分必要条件[J]．数学杂志，1998，8(4)：401～410.

[10] 孙道椿，张学莲．圆内亚纯函数的充满圆及其应用[J]．数学学报，1992，35(2)：279～285.

Distribution of Arguments of Meromorphic Function in the Uint Circle

(College of Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

ABSTRACT: In this paper we study the existence problem of Hayman direction of meromorphic function with order $\rho(0 < \rho < \infty)$ concerning derivatives, multiple values and small functions in the unit circle and we prove two theorems which are similar to the results in the plane.

KEYWORDS: singular direction; small function; multiple value

(责任编辑　刘尚坤)