1999年7月 重庆大学学报（自然科学版） Vol.22
第22卷第4期 Journal of Chongqing University(Natural Science Edition) Jul.1999

文章编号:1000-582x(1999)04-0126-05

(25)

126-130

二元压缩映象对和映象列的公共耦合不动点及重合点*

O189.2

颜敬先
（重庆师范高等专科学校，重庆 永川 402168）

摘 要：在一致凸 Banach 空间中，获得了二元非线性压缩映象对和映象列的公共耦合不动点的存在与唯一性定理，并对已有的结果进行了推广。

关键词：压缩映象；一致凸；耦合不动点 重合点 压缩映象列
中图分类号：O 177.2 **文献标识码**：A

1 引 理

设 X 是实Banach空间，$\bar{C}(X)$ 表示 X 的一切闭凸集的集合，在积空间 $X\times X$ 中引入通常的线性运算，并定义范数

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|,\|y\|\} \qquad \forall (x,y)\in X\times X \tag{1}$$

可以使 $X\times X$ 成为 Banach 空间。

按(1)式，由文献[1]、[2]易得

引理1 一致凸 Banach 空间 X 的积空间 $X\times X$ 仍是一致凸 Banach 空间，且 X 与 $X\times X$ 具有相同的凸性模。

引理2 设 X 是一致凸的 Banach 空间，$\bar{B}(\theta,r)\subset X\times X$ 是以 θ 为心，r 为半径的闭球，若 $\forall (x_i,y_i)\in \bar{B}(\theta,r)$，$(i=1,2,3)$ 且

$$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| \geqslant \|(x_2,y_2)-(x_3,y_3)\| \geqslant \epsilon > 0,$$

$$\|(x_2,y_2)\| \geqslant \left(1-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\epsilon}{r}\right)\right)r$$

则

$$\|(x_1,y_1)-(x_3,y_3)\| \leqslant \eta\left(1-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\epsilon}{r}\right)\right)\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|$$

其中，η 为 δ 的逆，当 $t<1$ 时，$\eta(t)<2$.

注：引理2是文献[2]中相应引理1.2在积空间的推广。

2 主要结果

定理1 设 X 是一致凸 Banach 空间，$M\subset \bar{C}(X)$，$A_i:M\times M\to M$ 是两个映象($i=1$,

* 收稿日期:1998-12-14
作者简介:颜敬先(1944-)，男，自贡市人，重庆师范高等专科学校副教授。主要从事数学教学与学校行政工作。

2)，由 A_i 构造映象对 $B_i: M\times M\to A_i(M\times M)\cdot A_i(M\times M)\subseteq M\times M$，其中，$B_i(x,y)=(A_i(x,y),A_i(y,x))(i=1,2)$，若 $\forall(x_i,y_i)\in M\times M(i=1,2)$，有

$$\|B_1(x_1,y_1)-B_2(x_2,y_2)\|\leqslant H(\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|,\ \|(x_1,y_1)-B_1(x_1,y_1)\|$$
$$\|(x_2,y_2)-B_2(x_2,y_2)\|,\ \|(x_2,y_2)-B_1(x_1,y_1)\|,\ \|(x_1,y_1)-B_2(x_2,y_2)\|)$$

其中，$H: R^5\to R^+$ 是上半连续函数，并对每一变元是不减的，且 $\forall t\in R^+$ 满足下列条件：

(i) $H(t,t,t,ht,0)\leqslant kt$，$H(t,t,t,0,ht)\leqslant kt$，这里，当 $h=2$ 时，$k=1$；当 $h<2$ 时，$k<1$；

(ii) $H(t,0,ht,t,t)<t$，当 $h<2$ 时。

则 $\exists(x^*,y^*)\in M\times M$，使得

1) $B_1(x^*,y^*)=B_2(x^*,y^*)=(x^*,y^*)$，即 $x^*=A_i(x^*,y^*)$，$y^*=A_i(y^*,x^*)$，$i=1,2$；

2) (x^*,y^*) 也是 B_1,B_2(或 A_1,A_2) 的唯一不动点(或耦合不动点。)

3) $\forall(x_0,y_0)\in M\times M$，序列 $\{(x_n,y_n)\}$：

$$(x_1,y_1)=B_1(x_0,y_0),(x_2,y_2)=B_2(x_1,y_1),(x_3,y_3)=B_1(x_2,y_2),\cdots$$

$(x_{2n-1},y_{2n-1})=B_1(x_{2n-2},y_{2n-2}),(x_{2n},y_{2n})=B_2(x_{2n-1},y_{2n-1}),\cdots$，收敛于 (x^*,y^*).

证　$\forall(x_0,y_0)\in M\times M$，$\{(x_n,y_n)\}\subset M\times M$ 是 3) 中定义的序列，令

$$d_n=\|(x_n,y_n)-(x_{n+1},y_{n+1})\|$$

首先证 $\{d_n\}$ 是单调减少的。

事实上，由条件有

$$d_n=\begin{cases}\|B_1(x_{n-1},y_{n-1})-B_2(x_n,y_n)\|\leqslant\\ \qquad H(d_{n-1},d_{n-1},d_n,0,\|(x_{n-1},y_{n-1})-(x_{n+1},y_{n+1})\|),\ n\text{ 为奇数}\\ \|B_2(x_{n-1},y_{n-1})-B_2(x_n,y_n)\|\leqslant\\ \qquad H(d_{n-1},d_n,d_{n-1},\|(x_{n-1},y_{n-1})-(x_{n+1},y_{n+1})\|,0),\ n\text{ 为偶数}\end{cases}\tag{2}$$

注意到

$$\|(x_{n-1},y_{n-1})-(x_{n+1},y_{n+1})\|\leqslant$$
$$\|(x_{n-1},y_{n-1})-(x_n,y_n)\|+\|(x_n,y_n)-(x_{n+1},y_{n+1})\|=d_{n-1}+d_n$$

可得

$$d_n\leqslant\begin{cases}H(d_{n-1},d_{n-1},d_n,0,d_{n-1}+d_n),\ n\text{ 为奇数}\\ H(d_{n-1},d_n,d_{n-1},d_{n-1}+d_n,0),\ n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

假设，对某 $n_0\in N$ 有 $d_{n_0}>d_{n_0-1}$，则 $\exists h_0\in(0,2)$，使得 $d_{n_0-1}+d_{n_0}=h_0d_{n_0}$ 又利用 H 对每个变量不减，则

$$d_{n_0}\leqslant\begin{cases}H(d_{n_0},d_{n_0},d_{n_0},0,h_0d_{n_0}),\quad n_0\text{ 为奇数}\\ H(d_{n_0},d_{n_0},d_{n_0},h_0d_{n_0},0),\quad n_0\text{ 为偶数}\end{cases}$$

于是，由条件(i) 得 $d_{n_0}\leqslant k_0d_{n_0}$，$k_0<1$，即 $d_{n_0}<d_{n_0}$，矛盾。这就证明了

$$\forall n\in N,\ d_n\leqslant d_{n-1}\tag{3}$$

其次，证 $e=\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$.

若 $e>0$，不妨设 $\theta\in M\times M$，设 $r'=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|(x_n,y_n)\|$，可假定 $r'>0$，则存在 $r>r'$，

使得 $r\left(1-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{e}{r}\right)\right)<r'$，且对某 $n_1\in N$，当 $\forall n\geq n_0$ 时，有 $(x_n, y_n)\in B(\theta, r)$。于是，由 r' 的定义及 r 的取法，存在 $\{(x_{n_j}, y_{n_j})\}\subset\{(x_n, y_n)\}(n\geq n_0)$，使得 $\forall(x_j, y_j)\in\{(x_{n_j}, y_{n_j})\}$

$$\|(x_j, y_j)\|\geq\left(1-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{e}{r}\right)\right)$$

据引理 2，有

$$\|(x_{j-1}, y_{j-1})-(x_{j+1}, y_{j+1})\|\leq r\left(1-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{e}{r}\right)\right)\|(x_{j-1}, y_{j-1})-(x_j, y_j)\| = h_1 d_{j-1} \quad (4)$$

其中，$h_1 = r\left(1-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{e}{r}\right)\right)$，易知 $h_1\leq 2$。故由条件和(2) ~ (4) 式，有

$$d_j\leq\begin{cases}H(d_{j-1}, d_{j-1}, d_{j-1}, 0, h_1 d_{j-1}), \text{当 } j\in\{n_k\} \text{ 为奇数}\\ H(d_{j-1}, d_{j-1}, d_{j-1}, h_1 d_{j-1}, 0), \text{当 } j\in\{n_k\} \text{ 为偶数}\end{cases}$$

从而又由条件(i)，$\forall j\in\{n_k\}$，均有

$$d_j\leq k_1 d_{j-1}, \text{对某 } k_1<1 \quad (5)$$

其中，k_1 与 j 无关。

由 $e>0$，$k_1<1$ 则存在充分小 $\varepsilon>0$，使 $k_1(e+\varepsilon)<e$，对此 $\varepsilon>0$，又可选取充分大的 $j\in\{n_k\}$，使 $d_{j-1}\leq e+\varepsilon$。由此，利用(5) 得 $d_j<e$，这与 d_n 单减趋于 e 矛盾，所以 $e=0$。

其三，证结论 1) 成立。

设 $(x'_n, y'_n)=(x_{2n}, y_{2n})$，定义 $M\times M$ 到 R^+ 的映射 $f(x, y)=\limsup\|(x, y)-(x'_n, y'_n)\|$，$\forall(x, y)\in M\times M$，易知 f 在 $M\times M$ 上连续且凸，因而弱下半连续，故存在唯一点 $(x^*, y^*)\in M\times M$，使 $(x^*, y^*)=\inf\limits_{(x, y)\in M\times M} f(x, y)$。

下面证

$$B_1(x^*, y^*)=B_2(x^*, y^*)=(x^*, y^*)$$

事实上，由

$$\begin{aligned}&\|B_2(x^*, y^*)-(x'_n, y'_n)\|\leq\\&\|B_2(x^*, y^*)-B_1(x'_n, y'_n)\|+\|(x'_n, y'_n)-B_1(x'_n, y'_n)\|\end{aligned}$$

且利用 $\|(x'_n, y'_n)-B_1(x'_n, y'_n)\|\to 0$ 有

$$f(B_2(x^*, y^*))\leq\limsup\|B_2(x^*, y^*)-B_1(x'_n, y'_n)\|$$

注意到

$$\begin{aligned}&\|(x^*, y^*)-B_2(x^*, y^*)\|\leq\\&\|(x^*, y^*)-(x'_n, y'_n)\|+\|B_2(x^*, y^*)-(x'_n, y'_n)\|\end{aligned}$$

并利用条件，又有

$$\begin{aligned}&\|B_2(x^*, y^*)-B_1(x'_n, y'_n)\|\leq\\&H(\|(x^*, y^*)-(x'_n, y'_n)\|, \|(x'_n, y'_n)-B_1(x'_n, y'_n)\|,\\&\|(x^*, y^*)-(x'_n, y'_n)\|+\|B_2(x^*, y^*)-(x'_n, y'_n)\|, \|(x^*, y^*)-(x'_n, y'_n)\|+\\&\|(x'_n, y'_n)-B_1(x'_n, y'_n)\|, \|B_2(x^*, y^*)-(x'_n, y'_n)\|)\end{aligned}$$

于是

$f(B_2(x^*,y^*)\leqslant \limsup H(\|(x^*,y^*))-(x'_n,y'_n)\|,\|(x'_n,y'_n)-B_1(x'_n,y'_n)\|,$
$\|(x^*,y^*)-(x'_n,y'_n)\|+\|B_2(x^*,y^*)-(x'_n,y'_n)\|,\|(x^*,y^*)-(x'_n,y'_n)\|+$
$\|(x'_n,y'_n)-B_1(x'_n,y'_n)\|,\|B_2(x^*,y^*)-(x'_n,y'_n)\|$

再利用 H的上半连续性,取子列的极限

$$f(B_2(x^*,y^*))\leqslant$$
$$H(f(B_2(x^*,y^*)),0,f(x^*,y^*)+f(B_2(x^*,y^*)),f(x^*,y^*),f(B_2(x^*,y^*))) \quad (6)$$

若 $B_2(x^*,y^*)\neq(x^*,y^*)$,则仅有 $f(B_2(x^*,y^*))>f(x^*,y^*)$,由(5)式,利用条件(ii),有

$$f(B_2(x^*,y^*))\leqslant H(f(B_2(x^*,y^*)),0,h_2,f(B_2(x^*,y^*)),f(B_2(x^*,y^*))$$
$$f(B_2(x^*,y^*)))<f(B_2(x^*,y^*))$$(其中 $h_2<2$),矛盾。故 $B_2(x^*,y^*)=(x^*,y^*)$.

现证 $B_1(x^*,y^*)=(x^*,y^*)$,若不然,$\|B_1(x^*,y^*)-(x^*,y^*)\|>0$,由条件(i)有

$$\|B_1(x^*,y^*)-(x^*,y^*)\|\leqslant\|B_1(x^*,y^*)-B_2(x^*,y^*)\|\leqslant$$
$$H(0,\|(x^*,y^*)-B_1(x^*,y^*)\|,0,\|(x^*,y^*)-B_1(x^*,y^*)\|,0)\leqslant$$
$$H(\|(x^*,y^*)-B_1(x^*,y^*)\|,\|(x^*,y^*)-B_1(x^*,y^*)\|,\|(x^*,y^*)-B_1(x^*,y^*)\|$$
$$\|(x^*,y^*)-B_1(x^*,y^*)\|,0)\leqslant k\|(x^*,y^*)-B_1(x^*,y^*)\|<\|(x^*,y^*)-B_1(x^*,y^*)\|$$

矛盾。故必有 $B_1(x^*,y^*)=(x^*,y^*)$.

综上,已证明了 $B_1(x^*,y^*)=B_2(x^*,y^*)=(x^*,y^*)$.

类似可证结论 2).

最后,证结论 3),这只须证 $F(x^*,y^*)=\limsup\|(x^*,y^*)-(x_n,y_n)\|=0$.

事实上,由

$$\|(x^*,y^*)-(x_{n+1},y_{n+1})\|=\begin{cases}\|B_1(x^*,y^*)-B_2(x_n,y_n)\|\leqslant \\ \quad H(\|(x^*,y^*)-(x_n,y_n)\|, \\ \quad 0,d_n,\|(x^*,y^*)-(x_n,y_n)\|, \\ \quad \|(x^*,y^*)-(x_{n+1},y_{n+1})\|),\ n\text{ 为奇数} \\ \|B_2(x^*,y^*)-B_1(x_n,y_n)\|\leqslant \\ \quad H(\|(x^*,y^*)-(x_n,y_n)\|, \\ \quad 0,d_n,\|(x^*,y^*)-(x_{n+1},y_{n+1})\|, \\ \quad \|(x^*,y^*)-(x_n,y_n)\|),\ n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

利用 H的上半连续性,取子列极限,得

$$F(x^*,y^*)\leqslant H(F(x^*,y^*),0,0,F(x^*,y^*),F(x^*,y^*))$$

若 $F(x^*,y^*)\neq 0$,只有 $F(x^*,y^*)>0$,由条件(ii),上式即为 $F(x^*,y^*)<F(x^*,y^*)$,矛盾。故 2) 中的迭代列收敛于(x^*,y^*).

以上也证明了 $A_i(i=1,2)$ 存在唯一公共耦合不动点。

定理2 设 X, M 满足定理1的条件,设 $\Delta=\{H \mid H:R^5\to R^+$, H 满足定理1条件(i)、(ii)$\}$,映象列 $A_n:M\times M\to M$, $n=1,2,\cdots$,构造映象列 $B_n:M\times M\to A_n(M\times M)\times A_n(M\times M)$, $n=1,2,\cdots$,其中, $B_n(x,y)=(A_n(x,y),A_n(y,x))$, $\forall(x,y)\in M\times M$, $n=1,2,\cdots$.若 $\forall B_i$, B_j, $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots$,都存在 $H(B_i,B_j)\in\Delta$,使得 B_i, B_j 满足定理1的全部条件,则

1) 存在唯一的 $(x^*,y^*)\in M\times M$,使得 $B_n(x^*,y^*)=(x^*,y^*)$,$(n=1,2,\cdots)$;

2) (x^*,y^*) 也是 $B_n(n=1,2,\cdots)$ 唯一的不动点;

3) $\forall B_i$, $B_j(i\neq j, j=1,2,\cdots)$,按定理1结论3)构造的序列均收敛于 (x^*,y^*).

证 证明较容易,故略。

注3 定理1,定理2推广了文献[2]~[4]的相应的结果。

参 考 文 献

[1] 定光桂. 巴拿赫空间引论[M]. 北京:科学出版社,1984.

[2] GOEBEL K, KIRK W A, SHIMI T N[J]. On characterizations of Fixed and Common Fixed Points[J]. Boll. Un. Mat. Ital, 1973, 7:67~75.

[3] PANT R P. Note Common Fixed Point Theorems for Contractive maps[J]. J. Math. Anal. Appl, 1998, 226:251~258.

[4] 兰坤泉. 一类映象的不动点及耦合不动点定理[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 1993, 16(3):1~5.

Common Coupled Fixed Points and Coincidence Points for a Sequence of Binary Contraction Mappings

YAN *Jin-xian*

(Chongqing Teacher's College, Yongchuan 402168, China)

ABSTRACT: The existence and Uni queness theorems of common coupled fixed point and coincidence points for a sequence of binary contraction mappings, canceled all continuous assumptions in uniformly convex Banach space. At the same time it generalizes anddevelops some known results.

KEYWORDS: contraction mapings; uniformly convex; coupled fixed point

(责任编辑 刘尚坤)