文章编号:1000-582x(1999)04-0006-07

②
6-12

公差设计中敏度系数的张量求法*

TG801

李 斌[1],张根保[2],徐宗俊[2]
(1.重庆大学 自动化学院,重庆 400044;2.重庆大学 机械工程学院)

摘 要:把张量相关概念引入计算机辅助公差设计的研究中,导出显含约束、具有普遍意义的敏度系数求取方法。结果在任何坐标系下具有不变形式;概念清晰,便于计算机实现。

关键词:公差设计;敏度系数;张量 机械产品,装配
中图分类号:TG 801;TG 802 **文献标识码**:A

1 问题的提出

计算机辅助公差设计是科学的公差设计方法。为此,文[1]提出一种描述机械产品装配拓扑关系的有向功能关系图(OFRG—Oriented Functional Relationship Graph)模型。并指出:在产品设计阶段、建立产品的功能精度方程是公差设计的重要步骤。功能精度方程表示零部件误差与产品输出误差之间的关系。一般形式为[2]:

$$y = f(\xi_1 x_1, \xi_2 x_2, \cdots, \xi_n x_n)$$

其中 y—— 产品输出特性误差;

ξ_i—— 第 i 个公差的灵敏度系数;

x_i—— 影响产品输出特性的第 i 个误差。

由此可见:建立功能精度方程的重点首先是确定 ξ_i 和 x_i。笔者在文[1]基础上建立起了产品拓扑与几何描述有机结合的产品系统模型[3],并提出了一套识别 x_i 的代数方法[4]。如何由此模型求取 ξ_i 成为计算机辅助建立功能精度方程的关键。

现有求取 ξ_i 的方法和公式多采用直角坐标系为参考标架,不便于实际零部件间运动、变化关系的描述与分析,更难用于描述、分析具有复杂曲面的零部件间的运动、变化。且其形式与坐标系的选取有关,使人对其物理实质不易辨认。故很难形成由零部件几何量组成的、具有普遍意义的求取 ξ_i 的具体公式。

笔者引入张量概念,运用张量分析方法,推得用张量描述零部件间相关量变化及相互关系表达式。它既可用于直角坐标系,也可用于斜坐标系、曲线坐标系。且在任何坐标系下具有

* 收稿日期:1998-07-06
基金项目:博士点基金资助(9361108)
作者简介:李斌(1958-),男,重庆人,讲师,重庆大学博士生。主要研究方向:自动控制理论及计算机辅助设计。

不变形式。其方法不仅可用于杆件间变化的描述与分析，也可用于复杂曲面变化（例如锥齿轮、蜗轮、蜗杆等）的描述和分析。由此可推得求取 ξ_i 的具体公式，避免求解高维方程组、矩阵求逆运算。其意义不仅在于解决了计算机辅助功能精度方程的建立问题；同时，对加工精度方程的建立、形位公差的研究都会有借鉴作用。

2　敏度系数 ξ_i 的张量求取方法

2.1　两类重要张量[5]

由张量定义可知，向量是一阶张量。对三维空间一标架 $\sigma[O; e_1, e_2, e_3]$，向量 v 根据 Einstein 规约可表为：

$$v = v^{\lambda} e_{\lambda} \tag{1}$$

则称 σ 为空间的一协变标架，相应地空间存在另一标架 $\sigma^{0}[O; e^1, e^2, e^3]$，且：

$$e_{\lambda} e^{h} = \delta_{\lambda}^{h} \tag{2}$$

$$\delta_{\lambda}^{h} = \begin{cases} 1 & h = \lambda \\ 0 & h \neq \lambda \end{cases} \tag{3}$$

δ_{λ}^{h} 称为 Kronecker 记号。

v^{λ} 称为一阶逆变张量的分量。相应地 v_{λ} 称为一阶协变张量的分量（$v = v_{\lambda} e^{\lambda}$）.

对空间另一向量 $\omega = \omega^{\rho} e_{\rho}$，则内积

$$v \cdot \omega = e_{\lambda} e_{\rho} v^{\lambda} \omega_{\rho} \tag{4}$$

定义 $g_{\lambda\rho} = e_{\lambda} e_{\rho}$，则有 $g_{\lambda\rho} = g_{\rho\lambda}$，且(4)式写为：

$$v \cdot \omega = g_{\lambda\rho} v^{\lambda} \omega^{\rho} \tag{5}$$

$g_{\lambda\rho}$ 称为二阶协变张量（度量张量）的分量。

因(5)式为正定二次形故有：

$$g \triangleq \det \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} > 0$$

则基矢三重积 $[e_1, e_2, e_3] = \sqrt{g}$，称为度量因子。

对称矩阵

$$G \triangleq \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

其逆阵

$$G^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix}$$

则 $g_{\lambda\rho} g^{\rho h} = \delta_{\lambda}^{h}$，$g^{\lambda\rho}$ 称为二阶逆变张量的分量。

2.2　标架的选取

公差设计是在原理设计与参数设计之后进行的一项重要设计工作。由于零（部）件的多

样性及几何描述的复杂性，使得参考标架的选取变得甚为重要。它一方面可充分利用参数设计的现有数据，另一方面可简化相关量的描述。在有向功能关系图[1]的各顶点选取一参考标架，其原点与标架类型根据具体问题确定。如原点选在接触点（线、点）上；标架可选斜标架或曲线标架。这样将极大增加描述手段的灵活性，扩大方法的适用范围，更好地体现具体问题的特征。便于研究、计算。

在各标架下描述相关量，用一指定标架来统一计算结果，这样将使相关量描述简单，计算结果统一，便于使用。

2.3 一阶张量变分公式

以下 0、K 表示标架序号，λ、ρ、h、x 等为张量的分量序号，取值为 1,2,3.

设空间 V 的两个参考标架 $\sigma_0[O; e_1^0, e_2^0, e_3^0]$，$\sigma_k[O^k; e_1^k, e_2^k, e_3^k]$. 一阶张量 $r_k \in V$ 在 σ_k 下表示为：

$$r_k = X_k^h e_h^k$$

则 r_k 的变分在 σ_0 下的坐标表示为：

$$(\delta r_k)_0 = G^{k0} C_k \delta X_k + \sqrt{g_k} G^{k0} G_k^{-1} X_k A_k \delta\theta^k \tag{6}$$

其中：

$$(\delta r_k)_0 \triangleq ((\delta r_k)_0^1, (\delta r_k)_0^2, (\delta r_k)_0^3)^T$$

式中 δX_k 为 r_k 在 σ_k 下的伸缩变分张量；

$\delta\theta^k$ 为 r_k 在 σ_k 下的旋转角位移张量；

$C_k \triangleq \mathrm{diag}(C_k^1, C_k^2, C_k^3)$ 伸缩约束矩阵；

$A_k \triangleq \mathrm{diag}(a_k^1, a_k^2, a_k^3)$ 旋转约束矩阵；

G_k 为 σ_k 的度量张量；

$G^{k0} \triangleq (e_\lambda^0 e_\rho^k)_{3\times3}$ 为 σ_0、σ_k 的联接矩阵；

$$X_k \triangleq \begin{bmatrix} 0 & X_k^3 & -X_k^2 \\ -X_k^3 & 0 & X_k^1 \\ X_k^2 & -X_k^1 & 0 \end{bmatrix}$$ 为旋转因子矩阵；

$\sqrt{g_k}$ 为 σ_k 的度量因子。

2.4 链路方程的变分公式

尺寸链及误差传动链方程统称为链路方程，它表征了产品（零部件）各相关量（尺寸）与其输出特性（功能特征）的拓扑与几何关系。在选定的标架下链路方程的各项均以一阶张量形式出现。设下式为一链路方程：

$$s_t r_t = \sum_{k=1}^{n-1} s_k r_k$$

其中，r_t 为产品（零部件）的输出特性，r_k 为产品（零部件）各相关量。s_t，s_k 取 +1 或 -1，为相应的拓扑信息。$n-1$ 为产品（零部件）与 r_t 相关量的个数。对上式求变分则

$$s_t \delta r_t = \sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta r_k$$

指定一标架 σ_0 为系统参考标架，由公式(6) 上式可写为坐标形式：

$$s_1(\delta r_1)_0 = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(G^{i0} C_k \delta X_k + \sqrt{g_k} G^{i0} G_k^{-1} X_k A_k \delta\theta^k) \tag{7}$$

(7) 式即为链路方程的变分公式。由此式可求得链路上任一相关量的误差对产品输出特性的影响。

3　一阶张量变分公式(6) 的推导

3.1　推导

在 2.3 的已知条件下，一阶张量 r_k 表为：

$$r_k = X_k^h e_h^k$$

则

$$\delta r_k = \delta X_k^h e_h^k + X_k^h \delta e_h^k = \delta X_k^h e_h^k + X_k^h \delta\omega_{h\rho}^k e_k^\rho$$

若设 $e_\rho^k \cdot e_h^k = C_{\rho h}^k$ 为常数，则 $\delta\omega_{h\rho}^k = e_\rho^k \delta e_h^k = -\delta\omega_{\rho h}^k$ 为二阶反对称张量的分量。

故

$$\delta r_k = \delta X_k^h e_h^k + X_k^h \delta\omega_{h\rho}^k e_k^\rho + X_k^\rho \delta\omega_{\rho h}^k e_k^h = \delta X_k^h e_h^k + X_k^h \delta\omega_{h\rho}^k e_k^\rho - X_k^\rho \delta\omega_{h\rho}^k e_k^h$$

因 $h \neq \rho$ 故可令 $h\rho = h_2$, $h = h_3$, $\rho = h_1$，则：

$$\delta r_k = \delta X_k^h e_h^k + X_k^{h_3} \delta\omega_{h_2}^k e_k^{h_1} - X_k^{h_1} \delta\omega_{h_2}^k e_k^{h_3}$$

上式二、三项重排则

$$\delta r_k = \delta X_k^h e_h^k + (X_k^{h_3} \delta\omega_{h_2}^k - X_k^{h_2} \delta\omega_{h_3}^k) e_k^{h_1} \tag{8}$$

而

$$\delta r_k e_\lambda^0 = \delta X_k^h g_{h_1\lambda}^{k0} + (X_k^{h_3} \delta\omega_{h_2}^k - X_k^{h_2} \delta\omega_{h_3}^k) g_k^{h_1 z} g_{z\lambda}^{k0}$$

$$\delta r_k e_\lambda^0 = \delta X_k^h g_{h_1\lambda}^{k0} + (X_k^{h_3} g_k^{h_2} g_{z\lambda}^{k0} - X_k^{h_2} g_k^{h_3 z} g_{z\lambda}^{k0}) \delta\omega_{h_1}^k \tag{9}$$

由(8) 可知，δr_k 是 X_k^h 的函数，随 X_k^h 变化而变化故空间 V 存在一向量场，称为位移场 δr_k。

因

$$e_\lambda^k e_k^{h_1} = \delta_\lambda^{h_1}$$

则

$$e_\lambda^k = e_\lambda^k e_{h_1}^k e_k^{h_1} = g_{\lambda h_1}^k e_k^{h_1} \tag{10}$$

(10) 代入(8) 则

$$\delta r_k = (\delta X_k^h g_{hh_1}^k + X_k^{h_3} \delta\omega_{h_2}^k - X_k^{h_2} \delta\omega_{h_3}^k) e_k^{h_1} = (\delta r_k)_{h_1} e_k^{h_1}$$

其中

$$(\delta r_k)_{h_1} = \delta X_k^h g_{hh_1}^k + X_k^{h_3} \delta\omega_{h_2}^k - X_k^{h_2} \delta\omega_{h_3}^k \tag{11}$$

由向量场旋度的定义得：

$$\mathrm{rot}\,\delta r_k = \frac{1}{\sqrt{g_k}}(\partial_{h_2}(\delta r_k)_{h_3} - \partial_{h_3}(\delta r_k)_{h_2}) e_{h_1}^k$$

由(11) 求得：

$$\mathrm{rot}\,\delta r_k = \frac{2}{\sqrt{g_k}} \delta\omega_{h_1}^k e_{h_1}^k = 2\,\delta\theta_k^{h_1} e_{h_1}^k$$

其中 $\delta\theta_k^{h_1}$ 为 r_k 绕 $e_{h_1}^k$ 的角位移。

故得

$$\delta\omega_{h_1}^k = \sqrt{g_k}\,\delta\theta_k^{h_1} \tag{12}$$

(12) 代入(9)：

$$\delta r_k e_\lambda^0 = \delta X_k^h g_{h\lambda}^{k0} + \sqrt{g_k}(X_k^{h_3} g_k^{h_2 z} g_{z\lambda}^{k0} - X_k^{h_2} g_k^{h_3 z} g_{z\lambda}^{k0}) \delta\theta_k^{h_1} \tag{13}$$

(13) 写为矩阵形式即得(未考虑约束)(6) 式。

3.2 链路联接矩阵 G^{kl} 的求取公式

令 $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots, i_n$ 为一链路的顶点序号，i_1，i_k 点标架间的联接矩阵可按下式求取：

$$G^{i_1 i_k} = G^{i_1 i_2} G_{i_2}^{-1} G^{i_2 i_3} G_{i_3}^{-1} G^{i_3 i_4} \cdots G_{i_{k-1}}^{-1} G^{i_{k-1} i_k} \tag{14}$$

其中：G_i 为 i 号顶点标架的度量矩阵，G^{ij} 为相邻顶点间两标架的联接矩阵。

4 实 例

图 1 为一曲柄连杆机构简图。应用公式(7) 求曲柄 OA、连杆 AB 以及滑块导路偏置 OB' 等尺寸误差引起的机构 $B'B$ 的误差[6]。OA 的倾角 θ_1 保持不变。

解：1. 首先建立机构标架体系如图 2，其中标架 $[O; e_{31}, e_{32}]$ 与标架 $[O; e_{01}, e_{02}]$ 重合，$e_{11} = e_{01}$，$e_{22} = e_{12}$. 标架均为单位标架。

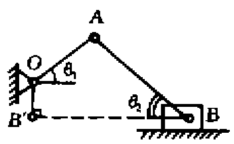

图 1 曲柄连杆机构

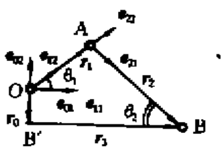

图 2 机构全局及局部标架

2. 各尺寸的向量描述。

$$r_1 = 0 \cdot e_{11} + r_1 e_{12} \qquad r_3 = r_3 e_{31} + 0 \cdot e_{32}$$
$$r_2 = r_2 e_{21} + 0 \cdot e_{22} \qquad r_0 = 0 \cdot e_{01} - r_0 e_{02}$$

3. 各标架的度量矩阵及联接矩阵。

$$G_0 = G_0^{-1} = I_2 \qquad G_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta_1 \\ \cos\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \qquad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) & 1 \end{bmatrix}$$

$$G^{01} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 \end{bmatrix} \qquad G^{02} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \cos\theta_1 \\ -\sin\theta_2 & \sin\theta_1 \end{bmatrix} \qquad G^{03} = I_2$$

4. 应用公式(7) 求机构位置误差

易得本例的链路方程为：

$$r_3 = r_1 + r_2 - r_0$$

则

$$\delta r_3 = \delta r_1 + \delta r_2 - \delta r_0 \tag{16}$$

1) 曲柄长度 OA 不精确

条件 $\delta r_0 = 0$, $A_1 = A_3 = 0$, $C_2 = 0$, $A_2 = I_2$, (16) 式表示为：

$$G^{03} C_3 \delta X_3 = G^{01} C_1 \delta X_1 + \sqrt{g_2}\, G^{02} G_2^{-1} X_2 A_2 \delta\theta_2 \tag{17}$$

代人已知得：

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta r_{31}\\ \delta r_{32}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sin\theta_1 & \sin\theta_2\\ -\cos\theta_1 & \cos\theta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ r_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\theta_2^1\\ \delta\theta_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \cos\theta_1\\0 & \sin\theta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta r_{11}\\ \delta r_{12}\end{bmatrix}$$

整理得：

$$\begin{bmatrix}1 & -r_2\sin\theta_2\\0 & -r_2\cos\theta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta r_{31}\\ \delta\theta_2^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \cos\theta_1\\0 & \sin\theta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta r_{11}\\ \delta r_{12}\end{bmatrix}$$

解得

$$[\delta r_{31} \quad \delta\theta_2^1]^{T}=\begin{bmatrix}\dfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_2} & -\dfrac{\sin\theta_1}{r_2\cos\theta_2}\end{bmatrix}^{T}\delta r_{12}$$

2) 连杆长度 AB 不精确

条件 $\boldsymbol{\delta r}_0=0,\ \mathbf{A}_3=\mathbf{A}_1=0,\ \mathbf{C}_1=0,\ \mathbf{C}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{C}_3,\ \mathbf{A}_2=\mathbf{I}_2$

结果

$$[\delta r_{31} \quad \delta\theta_2^1]^{T}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\cos\theta_2} & \dfrac{1}{r_2}\mathrm{tg}\,\theta_2\end{bmatrix}^{T}\delta r_{21}$$

3) 导路置 OB' 存在误差

条件 $\boldsymbol{\delta r}_1=0,\ \mathbf{C}_2=\mathbf{A}_0=0,\ \mathbf{C}_0=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2=\mathbf{I}_2,\ \mathbf{A}_3=0$

已知代入(7)式解得：

$$\begin{bmatrix}\delta r_{31}\\ \delta\theta_2^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{tg}\,\theta_2\\ \dfrac{1}{r_2\cos\theta_2}\end{bmatrix}\delta r_{02}$$

综合1)、2)、3)机构位置误差可表示为：

$$\delta r_3=\delta r_{31}=\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_2}\delta r_{12}+\frac{1}{\cos\theta_2}\delta r_{21}-\mathrm{tg}\,\theta_2\,\delta r_{02}$$

其中 $\dfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_2},\dfrac{1}{\cos\theta_2},-\mathrm{tg}\,\theta_2$ 即为需求的敏度系数。

5 结　论

综上所述，本文所得公式(7)有如下特征。

1) 与现有的用线性变换描述零部件间相关量运动变化及相互关系不同，公式(7)用张量描述其运动变化及相互关系。使其在任何坐标系下具有不变形式，反映了零部件间相关量变化的规律，是对问题本质的描述。由于其几何、物理意义明确，故可由此推导出求取 ξ_i 的具体公式，避免高阶方程组求解及矩阵求逆运算。

2) 由于张量既可描述零部件的尺寸、形状变化及相互关系，又可描述其表面积、体积；运动速度、加速度、张力、应变等多种几何、物理量。加之张量分析是微分几何、黎曼几何、运动学、力学、弹性力学、塑性力学、流体力学、电磁学、相对论研究所用的主要方法和工具。故把张量引入公差设计研究中可描述出产品几乎所有的输出特性，并且可把产品中各零部件的几何变形；各机构的位置误差、速度、加速度误差、动力学误差的描述和分析统一到一个理论体系之下。

3) 公式(7) 集产品(零部件) 拓扑、几何、约束信息于一体,较完整反映出产品(零部件)各相关量对产品输出特性的影响。它是求取产品(零部件) 功能误差及敏度系数的系统方法。

4) 运用公式(7) 所需的数据可由参数设计结果直接得到,或通过公式(14) 求得。

5) 运用公式(7) 的一个关键步骤是建立链路的各标架。由于公式(7) 在任何标架下都具有不变形式,故按张量分析一般的方法,针对零部件上具有曲面、曲线及各种复杂相互关系选取最适宜采用的标架,这就极大增加了公式的灵活性与适用范围。同时也为更多数学概念、方法的引入;解决计算机辅助公差设计中形位公差问题打下了基础。

6) 公式(7) 为误差坐标的矩阵式,形式固定,便于计算机实现。笔者仍在对公式(7) 作深入分析,已得出求 ξ_i 的一些具体公式。

参 考 文 献

[1] ZHANG G, PORCHET M. Some New Developments in Tolerance Design in CAD[A]. The ASME 1993 Design Automation Conference Albuquerque[C], New Mexico: ASME, 1993.

[2] 张根保,徐宗俊,王时龙 . 先进制造技术[M]. 重庆:重庆大学出版社,1996. 136~139.

[3] 李斌,张根保,徐宗俊 . 有向功能关系图 OFRG 功能实现的代数方法[J]. 重庆大学学报(自然科学版),1999,22(1):41~46.

[4] 李斌,张根保,徐宗俊 . 有向功能关系图 OFRG 功能的代数实现算法及图意义[J]. 重庆大学学报(自然科学版),1999,22(3):45~52.

[5] 李开泰,黄艾香 . 张量分析及其应用[M]. 西安:西安大学出版社,1984.

[6] H. Γ 勃鲁也维奇 . 机械精确度[M]. 上海:上海科学出版社,1966.

Method for Finding Sencitivity coefficients by Tensor Analysis in Tolerancing

LI Bin[1], ZHANG Gen-bao[2], XU Zhong-jun[2]

(1. College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. College of Mechanical Engineering, Chongqing University)

ABSTRACT: The relevent concepts of tensor analysis into the study of computer-aided tolerancing(CAT) are introduced, and the general method for seeking the sencitivity coefficients of the mechanical problems with explicit constrains is derived. The results are invariant in any coordinate system, and the concept are clear. The method is easy to be realized on a computer.

KEYWORDS: tolerancing; sencitivity coefficient; tensor

(责任编辑　张小强)