

文章编号: 1000-582x(1999)04-0078-04

⑬ 78-81, 107

有限元外推法在波导本征值问题中的应用

李永明, 俞集辉

(重庆大学 电气工程学院, 重庆 400044)

TN814

摘要: 基于一阶有限元法, 运用有限元的外推理论, 对用有限元外推法计算波导问题的本征值进行了探讨。算例表明这种方法算法简单且具有高精度性。

关键词: 有限元外推法; 本征值; 波导场

中图分类号: TM 11

文献标识码: A

在微波理论和技术中, 波导本征值问题是最基本的问题之一, 一方面, 各种波导中不同模式的场型分析和传输特性的研究直接和该问题相关, 另一方面, 很多微波部件和系统的分析、综合和最优化设计又往往以该问题的求解为基础。

对于波导问题, 我们可以将其简化归纳为对平面域的亥姆霍兹方程的求解。而对亥姆霍兹方程的数值求解方法中, 有限元法又以其方法的灵活性, 获得了极大的重视, 并得到了充分的应用。

由于有限元法本身的不足, 使得在一定剖分单元情况下, 用线性有限元法计算电磁场问题时要提高精度较为困难。基于有限元外推插值法在计算线性以及非线性电磁场场量问题中的成功应用^[1,2], 笔者尝试运用有限元的外推理论, 讨论了一种计算波导本征值的高精度方法, 即用有限元外推法计算波导本征值, 并运用该方法在一些波导的本征值求解方面, 做了一些有益的工作, 取得了一定的成果。

1 数学基础

考虑如下定解问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = ku & \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 Ω 是边界分段光滑的二维有界域, u 为平方可积, 且本征值 k 是简单的。显然, 式(1)的等价变分形式为:

$$\begin{cases} \text{求 } k \in \mathbb{R}, u \in H_0^1(G), \text{ 使} \\ a(u, v) = k(u, v) \quad \forall v \in H_0^1(G) \end{cases} \quad (2)$$

其中, $a(\cdot, \cdot)$ 是定义在 $H_0^1(G)$ 上的对称、连续的双线性形式, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 L_2 中的内积。

· 收稿日期: 1998-01-06

作者简介: 李永明(1964), 男, 浙江宁波人, 重庆大学博士生。从事电磁场理论及计算研究。

式(2)的有限元近似表述为：

$$\begin{cases} \text{求 } k_h \in R^1, u_h \in V_h, \text{ 使} \\ a(u_h, v) = k_h (u_h, v) \quad \forall v \in V_h \end{cases}$$

其等价算子形式为：

$$\begin{cases} k_h K_h u_h = u_h \\ (u_h, u_h) = 1 \end{cases}$$

令 $E_h: H_0^1$ 为 S_h 上的 Ritz 投影, $K_h = E_h K$, 那么: $|k - k_h| = O(h^2)$, $\|u - u_h\| = O(h^2)$.

若剖分 $\pi_{h/2}$ 为 π_h 的加密, 即 $\pi_{h/2}$ 各小三角形由 π_h 的三角形的三边中点相连构成(见图 1), 且记加密后对应的有限元解为 $k_{h/2}, u_{h/2}$, 则有:

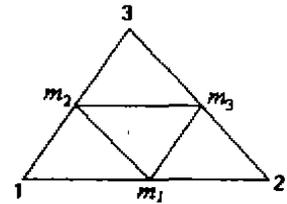


图 1 网格细分示意图

定理 1 设剖分是强正规的, 又设 k 为式(1)的简单本征值, 相应的规格化本征函数 $u \in$

$$C^4(\Omega), \text{ 则本征值外推估计为: } k = \frac{1}{3}(4k_{h/2} - k_h) + O(h^4) \quad (3)$$

定理 2 在定理 1 的假设下, 本征函数 π_h 的节点上的外推值有估计:

$$u = \frac{1}{3}(4u_{h/2} - u_h) + O(h^3 \ln h) \quad (4)$$

详细的证明见文献[3, 4].

2 波导场的有限元方程及波导本征值求解

2.1 有限元方程^[5]

当波在任意截面的波导中传播时, 可以将其中传播的电磁波分为 TM 波和 TE 波. 若取 u 表示场的纵向分量, 则无论是 TM 波还是 TE 波, 函数 u 均满足亥姆霍兹方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta^2 u = 0$$

但是对不同波型有不同的边界条件: 对 TE 波, $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0$, 对 TM 波 $u \Big|_{\partial \Omega} = 0$, $\partial \Omega$ 代表波导截面的边界线.

选用三角形剖分单元进行线性插值, 经过离散分析, 可得计算波导场的有限元方程为:

$$[K][u] = \eta^2 [T][u]$$

其中:

$$\begin{cases} K_r = \sum_{\text{以 } r \text{ 为顶点的单元}} K_r^n \\ K_s = \sum_{\text{以 } rs \text{ 为公共边的单元}} K_s^n \end{cases} \quad \begin{cases} T_r = \sum_{\text{以 } r \text{ 为顶点的单元}} T_r^n \\ T_s = \sum_{\text{以 } rs \text{ 为公共边的单元}} T_s^n \end{cases}$$

$$K_r^n = K_s^n = \frac{1}{4\Delta}(b_r b_s + c_r c_s) \quad (r, s = i, j, m)$$

$$T_r^n = T_s^n = \frac{\Delta}{12}(1 + \delta_{rs}) \quad (r, s = i, j, m) \quad \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases}$$

K_n, K_s, T_n, T_s 均为单元分析得到的计算系数。

波导场的有限元方程是一个广义本征值问题,且其系数矩阵 $[K]$ 是对称矩阵,系数矩阵 $[T]$ 是对称正定矩阵。

2.2 广义本征值问题的求解^[6]

对于广义本征值问题: $AX = kBX$ (5)

其中 A 是对称矩阵, B 是对称正定矩阵。

先将矩阵 B 作三角分解: $B = LL^T$ 、

其中 L 为下三角矩阵。将它代入式(5)并整理,得:

$$[L^{-1}A(L^{-1})^T](L^T X) = k(L^T X)$$

令: $L^T X = Y \quad P = L^{-1}A(L^{-1})^T$

则式(5)的广义本征值问题转化为一般本征值问题: $PY = kY$

且其本征值不变,而本征函数可通过反变换求得。

2.3 有限元外推法计算波导本征值

设某波导在粗三角剖分单元情形下用有限元法计算得到的本征值为 k_n , 随后在此粗剖分基础上加密剖分一次,此时再由有限元法计算得到的本征值为 $k_{n/2}$, 则根据定理 1, 此波导

的本征值可由外推 $k_{\text{外推}} = \frac{1}{3}(4k_{n/2} - k_n)$ 获得更精确的解。

3 算例及分析

为了检验文中所提出的方法,笔者着重计算分析了具有解析解的矩形波导的一些模式波的本征值^[7],并对一些没有解析解、横截面形状特殊的波导进行了计算。

3.1 计算波导 TE 波的情形

设待求矩形波导尺寸为 $(a \times b) = 23 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$. 有限元粗剖分为 20 个节点数, 24 个单元, 加密剖分后为 63 个节点, 96 个单元。表 1 给出了计算出的该波导的几个本征值对应的截止波长及误差。

表 1 矩形波导 TE 波截止波长的比较 mm

波长	λ_{10}	λ_{20}	λ_{30}	λ_{01}	λ_{11}
理论解	46.0	23.0	15.34	20.0	18.34
外推解	45.98	22.92	15.07	19.98	18.28
误差(%)	0.04	0.35	1.76	0.1	0.33
线性元解($n = 63, e = 96$)	45.71	22.43	14.55	19.78	17.91
误差(%)	0.63	2.48	5.15	1.1	2.35

我们还对如图 2 中的脊形和图 3 的十字形波导主模本征值^[8]进行了计算,其对应的截止波长结果见表 2。

3.2 TM 波的情形

待计算的矩形波导尺寸为 $23 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$. 有限元粗剖分为 25 个节点数, 32 个单元, 加密剖分后为 81 个节点, 128 个单元。表 3 给出了计算出的该波导的几个本征值对应的截止波长。

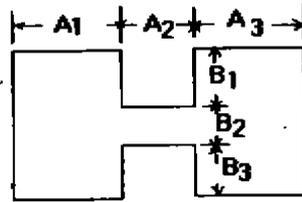


图 2 脊形波导

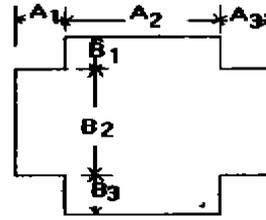


图 3 十字形波导

表 2 脊形和十字形波导主模本征值对应的波长比较

		mm			
波导	几何参数	粗分解 $n = 24, e = 26$	细分解 $n = 73, e = 104$	外推解	有限元解 $n = 249, e = 416$
脊形	$A_1 = A_3 = 2.8829$ $A_2 = 1.9304$ $B_1 = B_3 = 1.3335$ $B_2 = 0.635$	26.98	27.88	28.18	28.37
波导	几何参数	粗分解 $n = 21, e = 24$	细分解 $n = 65, e = 96$	外推解	有限元解 $n = 225, e = 384$
脊形	$A_1 = A_3 = 21.778$ $A_2 = 3.556$ $B_1 = B_3 = 1.778$ $B_2 = 3.556$	11.98	12.42	12.57	12.54

表 3 矩形波导 TM 波截止波长的比较

		mm				
波长	λ_{11}	λ_{21}	λ_{31}	λ_{41}	λ_{12}	
理论解	18.34	15.09	12.17	9.96	9.77	
外推解	18.32	14.97	11.82	9.72	9.28	
误差(%)	0.11	0.79	2.87	2.41	5.01	
线性元解($n=81, e=128$)	18.00	14.38	11.16	9.404	8.751	
误差(%)	1.85	4.7	8.3	5.58	10.43	

4 结 论

从有限元外推法计算波导本征值问题的本征值的计算公式, 以及以上波导场的各模式 TE 和 TM 波截止波长的计算结果的分析可看出, 用有限元外推法来提高求解波导场某一模式波截止波长的计算精度是完全可行的, 体现了在一定的计算精度下这种方法具有节省计算量和较少内存占用量的特点, 以及在一定的剖分单元下, 通过简单的代数运算, 便可较大的提高数值计算的精度。同时, 它实施过程简单, 编程方便, 易于为人们所掌握, 是一种具有推广应用价值的方法。

参 考 文 献

- [1] 俞集辉. 线性有限元计算的外推插值法[J]. 电工技术学报, 1995, (3): 37~42.
- [2] 俞集辉. 有限元外推插值法在非线性磁场计算中的应用[J]. 电工技术学报, 1999, (3): 57~61.

(下转 107 页)

