

文章编号:1000-582x(1999)05-0027-05

工程信号的小波时-频分析方法

陈东义¹, 曹长修¹, 彭伟²
(1. 重庆大学自动化学院, 重庆 400044; 2. 重庆市科委)

TN911.7
TN911.6

摘要: 讨论了如何采用小波变换对工程信号进行时-频分析的方法, 给出了小波变换时-频窗位置及大小与尺度及信号采样间隔的定量关系。

关键词: 信号处理 / 小波分析; 多分辨分析 **时频分析**
中图分类号: TN 911.22.6 **文献标识码:** A

小波变换最大的特点是可同时提供信号在时-频两域上的局部化信息。若对一工程信号进行小波变换, 通过在某一时刻及其邻域观察信号的小波变换在各尺度上的表现, 就可了解信号在该时段上所含频率成分的信息。小波变换同时具有一个时窗和一个频窗, 共同在时-频相平面上形成一个时-频窗。随着尺度的变化, 时-频窗的位置及形状, 即窗心的位置及窗宽的大小都产生相应的变化, 所以小波变换对信号具有适应性或聚焦功能。通常小波是以滤波器系数的形式给出的, 这时工程信号的小波变换是采用递推计算公式计算的。在这种情况下若要进行工程信号的小波时-频分析, 需要解决两个问题: 1) 需要根据滤波器系数求出小波的时间特性、频率特性以及与时-频分析至关重要的两对参数: 时、频窗心, 时、频窗宽。2) 应该在频率坐标上既标出尺度又给出该尺度所对应的频窗心位置及频带的大小。笔者就此进行了研究。

1 小波变换的工程意义

从频域角度阐述小波变换的工程意义。

1.1 带通与低通滤波器

二进小波 $\Psi(t)$ 是允许小波, 它满足允许条件 $C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$, 该条件蕴涵 $\Psi(0) = 0$ 。这说明 $\Psi(t)$ 本质上是一个带通滤波器。二进小波函数还是一个双窗函数。设 $\Psi(t)$ 的正频窗心为 ω_0 , 频窗宽为 Δ_Ψ , 若对正半频率轴进行二进划分, 不失一般性, 设 $\omega_0 = 3\Delta_\Psi$, 此时 $\Psi_{2^j}(j \in \mathbb{Z})$ 的频窗中心是 $(0, (3/2^j)\Delta_\Psi)$, 频窗宽为 $(2^{-j}\Delta_\Psi, 2^{-j+1}\Delta_\Psi]$, 则整个正半频轴被划分成互不相交的部分

• 收稿日期: 1998-07-28

基金项目: 重庆市应用基础研究基金资助项目(97-4703)

作者简介: 陈东义(1956-), 男, 山东济南人, 副教授, 博士。主要研究方向: 信号与图像处理, 可穿戴式计算机, 系统仿真。

$$(0, \infty) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (2^{-j} \Delta_{\Psi}, 2^{-j+1} \Delta_{\Psi}] \quad (1)$$

由此可看出, 当尺度 j 增大时, 二进小波的伸缩 Ψ_{2^j} 的频窗心 $\omega_0/2^j$ 以 2^j 速率向低频方向移动, 同时窗宽 $\Delta\omega/2^j$ 以 2^j 速率变窄。因此, 当 j 取 1 到 $+\infty$ 时则可得到无限个带通滤波器作用于信号的总体效果, 这相当于一个低通滤波器。这个低通滤波器对应着一个尺度函数, 记为 $\hat{\varphi}(t)$ 。可以证明它与由多分辨率分析所提出的生成元或尺度函数是同样的。在频域上, 我们把这一事实表达如下: 若 $\hat{\varphi}(t)$ 为与 $\Psi(t)$ 相对应的尺度函数, 则它满足

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{\Psi}(2^k \omega)|^2 \quad (2)$$

上式表示的是尺度 $j=0$ 时, 即 Ψ_{2^0} 所对应的尺度函数 $\hat{\varphi}(\omega)$ 。对于一般的尺度 j , 上式可写为

$$|\hat{\varphi}(2^j \omega)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{\Psi}(2^{k+j} \omega)|^2 \quad (3)$$

因二进小波变换满足 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\Psi}(2^k \omega)|^2 = 1$, 再由(3)可得

$$|\hat{\varphi}(0)|^2 = \lim_{j \rightarrow -\infty} |\hat{\varphi}(2^j \omega)|^2 = \lim_{j \rightarrow -\infty} \sum_{k=-j}^{\infty} |\hat{\Psi}(2^{k+j} \omega)|^2 = 1 \quad (4)$$

以及

$$|\hat{\varphi}(+\infty)|^2 = \lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}(2^j \omega)|^2 = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=j}^{+\infty} |\hat{\Psi}(2^{k+j} \omega)|^2 = 0 \quad (5)$$

这说明满足(2)式的 $\hat{\varphi}(\omega)$ 确实是一个低通滤波器。

对于(3)式, 如果分别令 $j=0$ 和 $j=-1$, 可以得到:

$$|\hat{\Psi}(\omega)|^2 = |\hat{\varphi}(\omega/2)|^2 - |\hat{\varphi}(\omega)|^2 \quad (6)$$

这说明小波函数带通滤波器 $\hat{\Psi}(\omega)$, 可由尺度函数低通滤波器 $\hat{\varphi}(\omega)$ 的“伸缩差”形成。可见只要找到一个尺度函数 φ , 就可确定一个二进小波 Ψ 。

1.2 小波变换的工程意义

若 $\Psi(t)$ 为二进小波, 且记 $\Psi_{2^j}(t) = \Psi(2^{-j}t)$, 则由卷积定义的二进小波变换为

$$W_{2^j} f(t) = f(t) * \varphi_{2^j}(t) \quad j \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

若 $\varphi(t)$ 是与二进小波对应的尺度函数, 且记 $\varphi_{2^j}(t) = \varphi(2^{-j}t)$, 则称

$$S_{2^j} f(t) = f(t) * \varphi_{2^j}(t) \quad j \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

为信号 $f(t)$ 在尺度 j 上的逼近。(7)、(8)两式的频域形式为

$$\hat{W}_{2^j} f(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{\Psi}_{2^j}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{\Psi}(2^j \omega) \quad (9)$$

$$\hat{S}_{2^j} f(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{\varphi}_{2^j}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{\varphi}(2^j \omega) \quad (10)$$

由(9)、(10)可清楚地看出, 在尺度 2^j 上的小波变换为带通滤波器 Ψ_{2^j} 对信号 $f(t)$ 滤波的结

果, 滤出通带内信号所含的频率成份, 对信号在不同尺度上进行小波变换, 则将 $f(t)$ 分解在尺度 2^j ($j = 1, 2, \dots, J$) 所对应的不同频带上, 在尺度 2^j 上的逼近为低通滤波器 φ_{2^j} 对信号 $f(t)$ 的滤波结果, 将通带以外的高频或低频成分滤掉, 而且由上面对小波滤波器与尺度函数滤波器关系的讨论可知, $W_{2^j} f$ 给出的是 $S_{2^j} f$ 与 $S_{2^{j-1}} f$ 之间的频率成分。

2 工程信号的小波时-频分析方法

采用小波变换对工程信号进行时-频分析, 关键问题之一是要知道小波变换的时、频特性或时、频窗的大小。在实际工程信号处理中, 通常采用离散二进小波变换递推公式(11)、(12)进行小波变换的计算。

$$S_{2^j} f[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k S_{2^{j-1}} f[n - 2^{j-1} k] \quad (11)$$

$$W_{2^j} f[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k S_{2^{j-1}} f[n - 2^{j-1} k] \quad (12)$$

一般来讲, 以信号 $f(t)$ 的采样值 $f[n]$ 做为初值, 即 $S_{2^0} f = f[n]$, 不用考虑采样间隔如何就可按(11)、(12)式求出各尺度上信号的小波变换及逼近, 但要为进行时、频分析而确定小波变换的时、频窗时, 就必须考虑时、频窗与尺度及采样频率的关系。

已知采用递推公式时, 初值($j = 0$ 时)选为

$$S_{2^0} f[n] = f^* \varphi_{2^0}[n] = f^* \varphi[n] = f[n] \quad (13)$$

此时可以认为采样间隔 Δt 是为 1 的, 因为从数学上来讲, 不管实际上数字信号的采样间隔如何, 通过适当选用时间单位, 总可认为采样密度为 1, 因此这样假设是合理的。在这种条件下, 对模拟信号的抽样值 f_n 可以认为是 $f(t)$ 在高分辨率分析子空间 V_0 上的逼近 $S_{2^0} f$ 。此时, 在尺度 j 上小波变换的时、频窗宽分别为:

$$\Delta_{\varphi_{2^j}} = 2^j \Delta_{\varphi}; \quad \Delta_{\psi_{2^j}} = \Delta_{\psi} / 2^j \quad (14)$$

而在尺度 j 上, 小波变换的频窗心为:

$$\omega_{\psi_{2^j}} = \omega_{\psi_0} / 2^j \quad (15)$$

上面诸式中: Δ_{φ} 为 $\Psi(t)$ 的时窗宽, Δ_{ψ} 为 $\Psi(\omega)$ 的频窗宽; ω_{ψ_0} 为 $\Psi(\omega)$ 的频窗心, Δ_{φ} 、 Δ_{ψ} 及 ω_{ψ_0} 的计算参见[2, 3]。一般对称小波 $\Psi(t)$ 的时窗心取为 0。然而, 实际上信号的采样间隔 $\Delta t \neq 1$, 若这时时间轴的单位与采样间隔的时间单位相同, 则可以认为以 Δt 为采样间隔对 $f(t)$ 采样得到的离散信号 $f[n]$ 是 $f(t)$ 在某个多分辨率子空间上的投影或逼近 $S_{2^j} f[n] = f[n]$, 而不是在 V_0 上的投影或逼近。笔者采用递推公式计算小波变换时, 为规范起见, 都从尺度 $j = 0$ 开始, 即仍取 $S_{2^0} f[n] = f[n]$, 则此时的小波变换时、频窗不仅随尺度变化, 而且与采样间隔 Δt 有关, 对此给出以下结论:

当采样间隔时 $\Delta t \neq 1$, 在第 j 尺度上离散二进小波变换的时、频窗为:

$$\text{时窗宽 } \Delta_{\varphi_{2^j}} = 2^j \Delta t \cdot \Delta_{\varphi}; \quad \text{频窗宽 } \Delta_{\psi_{2^j}} = \Delta_{\psi} / (2^j \cdot \Delta t) \quad (16)$$

$$\text{频窗心 } \omega_{\psi_{2^j}} = \omega_{\psi_0} / (2^j \Delta t) \quad (17)$$

对于第 j 尺度上信号逼近的时、频窗有类似的结论:

$$\text{时窗宽 } \Delta_{\varphi_{2^j}} = 2^j \Delta t \cdot \Delta_{\varphi}; \quad \text{频窗宽 } \Delta_{\psi_{2^j}} = \Delta_{\psi} / (2^j \cdot \Delta t) \quad (18)$$

$$\text{频窗心 } \omega_{\varphi_j} = \omega_0 / (2^j \Delta t) \tag{19}$$

下面给出一个实例,以验证上述结论:

- 1) 信号 $f(t) = \sin(388.69 * 2\pi * t) + \sin(194.35 * 2\pi * t) + \sin(97.17 * 2\pi * t)$;
- 2) 采用 Battle - lemarie 三阶样条小波;
- 3) $\Psi(\omega)$ 的频窗心 $f_0 = 0.7592 \text{ Hz}$ 、频窗宽 $\Delta f = 0.1707 \text{ Hz}$ ($f_0 = \omega_{\varphi_0} / 2\pi, \Delta f = \Delta\omega / 2\pi$);
- 4) 采样间隔 $\Delta t = 2048 \text{ s}$.

表 1 给出,当 $\Delta t = 1 \text{ s}$ 或 $\Delta t = 2048 \text{ s}$ 时,小波变换在尺度 $j = 0, 1, 2, 3, 4$ 上的频窗心及频窗宽对照。

表 1 $\Delta t = 1 \text{ s}$ 及 $\Delta t = 2048 \text{ s}$ 的频窗心、窗宽对照表

尺 度	$\Delta t = 1 \text{ s}$		$\Delta t = 2048 \text{ s}$	
	窗心	窗宽	窗心	窗宽
$j = 0$	0.759 2	0.170 4	1 554.778 3	348.910 8
$j = 1$	0.379 8	0.085 2	777.389 1	174.455 4
$j = 2$	0.189 8	0.042 6	388.694 6	87.227 7
$j = 3$	0.094 9	0.021 3	194.347 3	43.613 9
$j = 4$	0.047 4	0.010 6	97.173 7	21.806 9

由表 1 可得出结论:在第一尺度上,小波变换的频带不包含 $f(t)$ 三个谐波的频率,所以该尺度上的小波变换为零;在第二尺度上,小波变换的频带只包含 $f(t)$ 第一个谐波的频率,所以该尺度上的小波变换即为 $f(t)$ 的第一个谐波;在第三尺度上,小波变换的频带只包含 $f(t)$ 第二个谐波的频率,所以该尺度上的小波变换即为 $f(t)$ 的第二个谐波;在第四尺度上,小波变换的频带只包含 $f(t)$ 第三个谐波的频率,所以该尺度上的小波变换即为 $f(t)$ 的第三个谐波。由进一步的类似分析还可知:在第一尺度上,因信号逼近对应的频带包含了 $f(t)$ 三个谐波的频率,所以该尺度上,信号逼近与原信号相同;在第二尺度上,通带只包有后两个谐波的频率,所以在该尺度上的信号逼近只含有后两个谐波;同理在第三尺度上的信号逼近只含有最后一个谐波,而在第四尺度上的信号逼近不含任何谐波。图 1、图 2 分别是在 $j = 1, 2, 3, 4$ 尺度上的小波变换及逼近。由此可见,这与笔者的分析结果相符合。图 1、图 2 同时也说明小波变换 $W_{\varphi_j} f(t)$ 给出了信号逼近 $S_{j-1} f(t)$ 与 $S_j f(t)$ 之间“差”的信息。

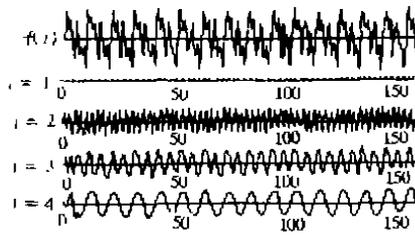


图 1 $f(t)$ 及 $f(t)$ 的小波变换

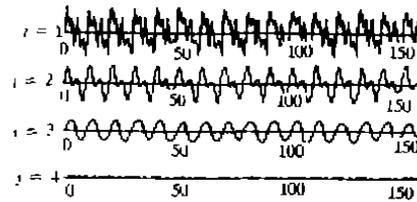


图 2 $f(t)$ 的逼近

该例说明了小波变换 $W_2(f, t)$ 的带通滤波特性及信号逼近 $S_2(f, t)$ 的低通滤波特性。同时也映证了文中推导出的关于采用离散递推公式计算数字信号的二进小波变换与信号逼近时、其时、频窗心及时、频窗宽与尺度及采样间隔的定量关系。

3 小结

在采用小波进行工程信号时-频分析时,需要了解尺度函数的低通滤波特性,小波函数的带通滤波特性以及它们之间的关系和工程意义,还需要给出信号的小波变换在时-频两域所反映出的信号特征,这就要求对频率坐标的标定不能仅给出尺度,而应同时给出各尺度上小波变换所对应的频带范围或频窗心、频窗宽。当采用递推公式计算离散小波变换时,做到上述要求需解决两个问题:1)基本小波的时、频窗指标的计算^[2,3];2)小波变换时、频窗位置及大小与尺度及信号采样间隔的定量关系。笔者就此做了探讨,并对文中所给出的定量关系举例进行了验证。需指出的是,在实际应用中信号的频率成分是复杂的,不会得到举例中的理想分频效果,因为小波带通滤波并不是严格的,不同尺度的频带之间存在交叠,所以在进行时-频分析时,若要想得到好的分频效果,应选择频域衰减快、截止特性好的小波。

参 考 文 献

- [1] MALLAT S, ZHANG S. Characterization of signals from multiscale edges[J]. IEEE Trans. PAMI, 1992, 14(7): 710~732.
- [2] INGRID DAUBECHIES. Ten Lectures on Wavelets[M]. Montpellier, Vermont Capital City Press, 1992. 129~166.
- [3] 陈东义. 小波分析在故障信号处理中的应用研究[D]. 重庆:重庆大学, 1998. 2.
- [4] MARTIN VETTERLI, JELENA KOVACEVIC. Wavelets and Subband Coding [M]. Englewood Cliffs, New Jersey Prentice Hall PTR, 1996. 92~194.
- [5] 刘贵忠, 邸双亮. 小波分析及其应用[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 1992.

Method of Time - Frequency Analysis of Engineering Signals Using Wavelet

CHEN Dong-yi, CAO Chung-xiu, PENG Wei

(College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

ABSTRACT: The method to carry out time-frequency analysis of engineering signal using wavelets transform is discussed and the formul of quantitative relationship between the position & width of time-frequency window of wavelet transform and the scale & sampling interval is put forward.

KEYWORDS: signal processing / wavelet analysis; multiresolution analysis

(责任编辑 吕赛英)