



文章编号: 1000-582x(1999)05-0091-04

结构动力分析的二阶矩阵扰动振型叠加法

杨佑发¹, 郑硕才¹, 邹银生²

(1. 重庆大学 建筑工程学院, 重庆 400044; 2. 湖南大学 结构研究所, 长沙 410082)

摘要: 提出了一种求解的非线性地震反应的二阶矩阵扰动振型叠加方法, 通过与 Wilson- θ 法的比较, 验证了它的高效性与可行性。

关键词: 二阶矩阵; 扰动; 振型叠加法

中图分类号: TU 311.3

文献标识码: A

逐步积分法在求解过程中需要进行矩阵逆运算, 数值求解无法消除作用不大的高阶振型的影响, 因而所占用的内存与机时均较多。振型叠加法在线性动力分析方面相当有效且计算简便, 近年来, 国内外一些学者相继研究了该方法用于非线性动力分析的途径。他们从用于结构静力弹塑性分析的增量初应变法受到启发, 即将塑性应变处理成一种等效外加荷载, 于是将弹塑性问题化为线弹性问题来求解。S. C. Liu 与 T. H. Lin, 王金鲁以及 R. Villaverde 等将上述增量初应变法的原理与振型叠加法相结合, 来求解结构的弹塑性动力反应, 但该方法只适用于处理具有简单的力-变形恢复力关系的结构, 且附加塑性荷载的处理尚存在一定的困难。R. E. Nickell 指出: 现有结构非线性动力分析实质上为分段线性化, 于是可以在每一个计算步长内用振型叠加法来求解结构的动力反应增量。他建议利用上步的结构振型作为本步结构振型的初始近似, 通过反复迭代来解得结构当前的真实振型。最后, R. E. Nickell 认为: 该方法与逐步积分法相比, 不存在算法稳定性问题, 可采用相对较大的积分步长, 这样计算工作量不会比逐步积分法大, 而且它可以消除不必要的高阶振型的影响, 具有足够的精度。

1 算法原理

强震作用下非线性结构的增量型动力平衡方程为:

$$[M]\{\Delta \ddot{x}\} + [C]\{\Delta \dot{x}\} + [K]\{\Delta x\} = -[M]\{I\}\Delta \ddot{x}_g \quad (1)$$

$\{\Delta x\}$, $\{\Delta \dot{x}\}$, $\{\Delta \ddot{x}\}$ 分别为结构的位移、速度、加速度反应增量向量, $\Delta \ddot{x}_g$ 为地面地震动加速度增量; $[M]$ 为结构的质量矩阵; $[K]$ 为结构的动力刚度矩阵; $[C]$ 为结构的阻尼矩阵。

根据现有非线性动力分析的分段线性法原理, 假设刚度矩阵采用本步开始处的切线刚度矩阵, 且在本步内, 保持此切线刚度矩阵不变, 这样在每一积分步长内, 非线性结构具有线性特性, 振型叠加法原理仍旧有效。于是每一步内的位移反应增量可依振型叠加法, 得:

• 收稿日期: 1998-09-23

作者简介: 杨佑发(1968-), 男, 湖南醴陵人, 博士。主要从事建筑结构分析的研究和教学工作。

$$\{\Delta x\} = \sum_{i=1}^m \Delta \eta^{(i)} \{U^{(i)}\} \quad (2)$$

$\{\Delta x\}$ 为结构的位移反应增量向量, $\Delta \eta^{(i)}$ 为结构的第 i 阶振型反应增量, $\{U^{(i)}\}$ 为前时刻结构的第 i 阶振型向量, m 为振型叠加法所截取的振型数, 一般地, m 远小于结构自由度数。由此可以看出振型叠加法的主要优点在于它可以消除动力反应中高阶振型的影响。由于有限单元法在离散过程中存在着固有误差, 进而导致高阶振型没有什么实际意义。步步积分法则是通过积分过程的算法阻尼效应来消除高阶振型的影响。

利用振型正交性条件, 方程(1)可由变换(2)解耦成为:

$$[M]^* \{\Delta \eta\} + [C]^* \{\Delta \dot{\eta}\} + [K]^* \{\Delta \eta\} = -[U]^T [M] \{\ddot{x}_g\} \quad (3)$$

式中:

$$[U] = [\{U^{(1)}\}, \{U^{(2)}\}, \dots, \{U^{(m)}\}]$$

$$[M]^* = [U]^T [M] [U], [C]^* = [U]^T [C] [U]$$

$$[K]^* = [U]^T [K] [U]$$

方程(3)实际上已化成为 m 个解耦的二阶常微分方程, 很容易由方程(3)求出所考虑的振型坐标增量 $\{\Delta \eta\}$, 然后由(2)计算位移反应增量, 进而通过各单元的瞬时单元刚度矩阵求出各单元内力反应增量。

实际上, 结构在强震作用下逐渐进入非线性阶段, 计算上通过不断逐渐修正结构各单元的单元刚度矩阵, 进而改变结构的总体刚度矩阵 $[K]$ 来模拟结构的不同非线性工作状态。在时程反应分析中, 时间步长 Δt 取值很小, 一般取为 0.02 s 左右, 因此可以认为每一步内结构的刚度矩阵的改变量与刚度矩阵相比是一小量, 这样就可以从上一步内结构的各阶振型出发利用矩阵扰动法来求解结构在本步长内的真实振型。

根据矩阵扰动原理, 假设结构的质量矩阵保持常矩阵 $[M]$ 不变, 上一步内结构的刚度矩阵为 $[K_0]$, 系统的第 i 阶振型向量为 $\{U_0^{(i)}\}$, 第 i 阶特征值为 $\lambda_0^{(i)}$, 则本步内结构的刚度矩阵、振型向量和特征值分别为:

$$[K] = [K_0] + [\Delta K] \quad (4)$$

$$\{U^{(i)}\} = \{U_0^{(i)}\} + \{\Delta U_1^{(i)}\} + \{\Delta U_2^{(i)}\} \quad (5)$$

$$\lambda^{(i)} = \lambda_0^{(i)} + \Delta \lambda_1^{(i)} + \Delta \lambda_2^{(i)} \quad (6)$$

然后通过振型正交性条件以及频率与振型方程, 并化简精确到二级小量可得:

$$\{\Delta U_1^{(i)}\} = \sum_{s=1}^m C_{si}^{(i)} \{U_0^{(s)}\} \quad (7)$$

$$C_{si}^{(i)} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_0^{(i)} - \lambda_0^{(s)}} (\{U_0^{(i)}\}^T [\Delta K] \{U_0^{(s)}\}) & (i \neq s) \\ 0 & (i = s) \end{cases}$$

$$\Delta \lambda_1^{(i)} = (\{U_0^{(i)}\}^T [\Delta K] \{U_0^{(i)}\}) \quad (8)$$

$$\text{令: } \{U_0^{(i)}\} = \{U_0^{(i)}\} + \{\Delta U_1^{(i)}\} \quad (9)$$

$$\lambda_0^{(i)} = \lambda_0^{(i)} + \Delta \lambda_1^{(i)} \quad (10)$$

$$\text{则: } \{\Delta U_2^{(i)}\} = \sum_{s=1}^m C_{si}^{(i)} \{U_0^{(s)}\} \quad (11)$$

当 $i \neq s$ 时:

$$C_s^2 = \frac{1}{\lambda_{0i}^{(s)} - \lambda_{0i}^{(i)}} [\{U_{0i}^{(i)}\}^T [\Delta K] \Delta U_i^{(i)} - \Delta \lambda_i^{(i)} \{U_{0i}^{(i)}\}^T [M] \Delta U_i^{(i)}] \quad (12)$$

当 $i = s$ 时:

$$C_{ss}^2 = 0$$

$$\Delta \lambda_i^{(i)} = \{U_{0i}^{(i)}\}^T [\Delta K] \Delta U_i^{(i)} - \Delta \lambda_i^{(i)} \{U_{0i}^{(i)}\}^T [M] \Delta U_i^{(i)} \quad (13)$$

于是,从上一步结构的自振频率所对应的特征值 $\lambda_{0i}^{(i)}$ 以及振型向量 $\{U_{0i}^{(i)}\}$ 出发,只要已知本步内结构刚度矩阵的改变量 $[\Delta K]$,则可简单地由(6)式算得本步内结构第 i 阶特征值的改变量 $\Delta \lambda^{(i)} = \Delta \lambda_1^{(i)} + \Delta \lambda_2^{(i)}$,由式(5)算得本步内第 i 阶振型向量。

2 算例分析

该结构是一幢三层的粘土砖砌体房屋,其平面如图 1 所示,详细资料见文献[2]。图中尺

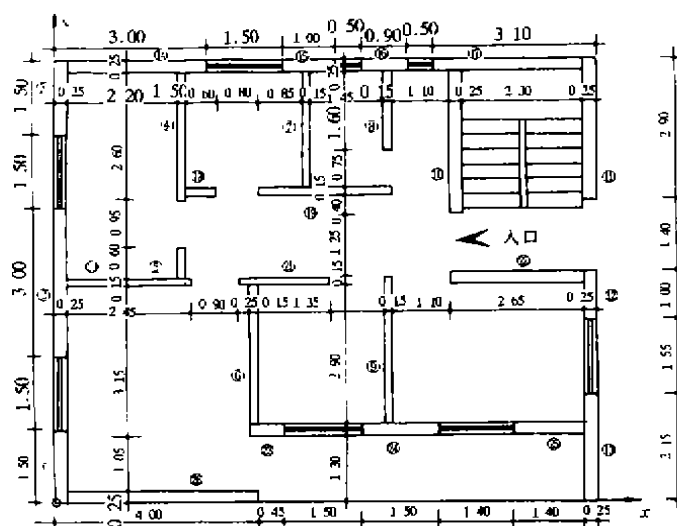


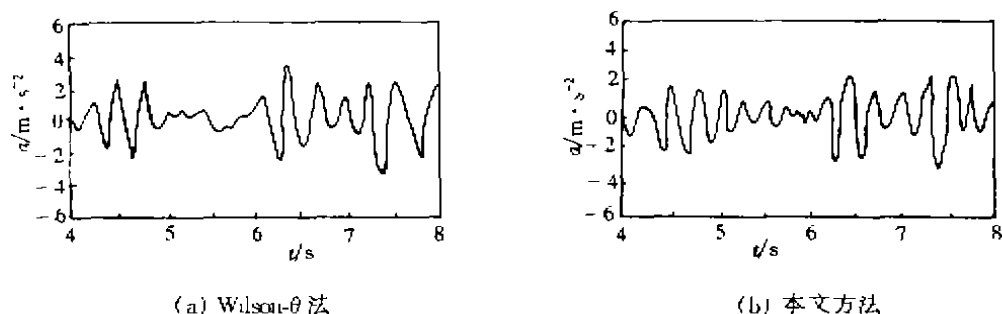
图 1 房屋建筑平面图

寸以 m 为单位,层高均为 3 m,砖墙自重 17.5 kN/m^3 ,切变模量为 168 MPa ,单位面积楼板重 5.9 kN/m^2 ,图中括号内数字表示墙片单元编号。图 2 给出了沿 Y 方向输入 Pacoima 地震记录作用下,由 Wilson- θ 法与本文方法所算得的第三层加速度反应时程,表 1 给出了墙单元剪力值的比较。

表 1 墙单元剪力值对比 kN

单元号	2		4		26	
层号	Wilson- θ	本文	Wilson- θ	本文	Wilson- θ	本文
1	122.7	129.8	76.9	72.5	30.1	37.8
2	99.0	103.7	60.2	56.2	22.1	22.4
3	60.8	55.3	32.4	28.6	9.6	8.8

由对比分析可知,二阶矩阵扰动振型叠加法与 Wilson- θ 法所得结果十分接近。

图 2 第三层加速度 a 反应时程

3 结 论

二阶矩阵扰动振型叠加法可以很好地用于结构的非线性地震反应时程分析中, 由于它可以消除无意义的高阶振型对当前实际振型的影响及积分步长不受数值积分稳定性所限制, 因而在计算时间及计算精度与收敛性方面均较步步积分法为优。

参 考 文 献

- [1] 王金鲁. 桥梁弹塑性地震反应分析——附加塑性荷载振型叠加法[J]. 土木工程学报, 1988, (4): 47~52.
- [2] TANRIKULU A K. The Nonlinear Response of Unreinforced Masonry Buildings to Earthquake Excitations[J]. Earthquake Eng. Struct. Dyn, 1992, 21: 965~985.
- [3] NICKELL R E. Nonlinear Dynamics by Mode Superposition[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1986, 7: 118~126.
- [4] 杨佑发. 底部两层框剪砌体房屋抗震及隔震性能研究[D]. [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学土木工程系, 1998.

The Mode Superposition Method with the Second Order Matrix Perturbation Technique for Structural Dynamic Analysis

YANG You-fa¹, ZHENG Shun-cai¹, ZOU Ying-sheng²

(1. College of Architectural Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. Institute of Structural Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

ABSTRACT: The mode superposition method with the second order matrix perturbation technique for calculating nonlinear seismic response of structure is presented. The comparison between the proposed method and wilson- θ method is made by numerical examples, the high effectiveness and feasibility of the proposed method are verified.

KEYWORDS: the second order matrix; perturbation technique; the mode superposition method

(责任编辑 刘尚坤)