114-111

(18)

文章编号:1000-582x(1999)05-0104-08

产生 Berry 几何相的动力学机制
——态矢的无限微弱变化跃迁*

O411.1

张忠灿，方祯云，胡陈果，孙世军
(重庆大学 理学院，重庆 400044)

摘　要：针对能够获得具有实质意义的 Berry 几何相所关联的态矢变化跃迁的物理背景作了一定程度的探讨，结果表明：态矢的无限微弱变化跃迁是产生出具有"实质意义"的 Berry 几何相的动力学机制。

关键词：绝热近似；Berry 几何相；循环周期演变；态矢变化跃迁
中图分类号：O 365；O 230　　　　**文献标识码**：A

Berry 从"绝热近似"角度曾首先预言，在物理世界中存在一种"非动力学性质"的几何位相 $\gamma_n(C)$(称为 Berry 几何相)[1]。对于 Berry 所预言的这种几何位相 $\gamma_n(C)$，不但在核物理[2]、光学[3]、原子分子物理学[4]研究领域获得了有关的实验检验，而且还推动了许多相关物理学科理论的研究[5~7]。直至今日，关于 Berry 几何相问题的研究，仍然是现代物理学国际前沿科学研究中的热点课题之一。

然而，关于 Berry 几何相的存在所涉及的"物理背景"条件及其相关的物理机制等问题的探讨，至今仍是许多学者感兴趣的问题，并从不同的物理角度作了研究[6~10]。笔者将从另外一个物理角度——即从量子系统瞬时本征态矢的变化跃迁来讨论这个问题。

1　态矢变化跃迁的物理背景

Berry 曾假设[1]，在含时 Hamiltonian 作循环周期演变的量子系统 $[\hat{H}(t=T)=\hat{H}(t=0)]$ 中，若演变"足够缓慢"、可以采用"绝热近似"方法由单一能级的瞬时本征态矢构成"演变波函数"，进而将产生出一个"非动力学性质"的几何位相。换句话说，当量子系统的演变"足够缓慢"时，按 Berry 表示出的演变波函数：

$$|\Psi(t)\rangle=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_n\boldsymbol{R}(t')\mathrm{d}t'\right\}\cdot\exp\{i\gamma_n(t)\}\cdot|n(\boldsymbol{R}(t))\rangle;[\gamma_n(0)=0] \quad (1)$$

可以满足薛定谔方程

---

* 收稿日期：1998-07-09
基金项目：国家自然科学基金资助课题(19575074 和 19835040)

作者简介：张忠灿(1946-)，男，重庆巴县人，重庆大学理学院物理系教授。主要从事理论物理的研究。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(\mathbf{R}(t))|\Psi(t)\rangle \tag{2}$$

其中，含时Hamiltonian算符 $\hat{H}(t)$ 已作了"参数化"处理：$\hat{H}(t)\Rightarrow\hat{H}(\mathbf{R}(t))$；[参变量 $\mathbf{R}(t)=(X(t)、Y(t),\cdots)$]，因而瞬时能量本征方程也采用参变量表出：

$$\hat{H}(\mathbf{R}(t))|n(\mathbf{R}(t))\rangle = E_n(\mathbf{R}(t))|n(\mathbf{R}(t))\rangle \quad (n\text{为能级量子数}) \tag{3}$$

量子系统循环演变一周(t:0→T)，即对应出参变量 $\mathbf{R}(t)$ 在参数 $\mathbf{R}$ 空间中形成一条闭合曲线 $C\Rightarrow(X(t),Y(t),\cdots)_{0\leqslant t\leqslant T}$，而Berry几何相 $\gamma_n(T)\Rightarrow\gamma_n(C)$，则由曲线 C 上的回路积分给出：

$$\gamma_n(C) = i\oint_C\langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}n(\mathbf{R})\rangle\cdot \mathrm{d}\mathbf{R} \tag{4}$$

若 $\gamma_n(C)\neq 2k\pi$；(k为整数)，则获得具有"实质意义"的Berry几何位相因子 $\exp\{i\gamma_n(C)\}\neq 1$.

Berry给出的式(4)，存在另一等价的表述形式：

$$\gamma_n(C) = i\cdot\int_0^T\langle n(\mathbf{R}(t))\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|n(\mathbf{R}(t))\rangle\cdot\mathrm{d}t \tag{5}$$

Berry公式(4)[或(5)]来源于满足(1)的薛定谔方程(2)，具体说来，是来源于如下微分方程式：

$$\dot{\gamma}_n(t)\cdot|n(\mathbf{R}(t))\rangle = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|n(\mathbf{R}(t))\rangle \tag{6}$$

下面，利用瞬时完备性：$\sum_m|m(\mathbf{R}(t))\rangle\langle m(\mathbf{R}(t))|=1$，可将方程(6)表成

$$\dot{\gamma}_n(t)|n(\mathbf{R}(t))\rangle = i\left\{\langle n(\mathbf{R}(t))\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|n(\mathbf{R}(t))\rangle\right\}\cdot |n(\mathbf{R}(t))\rangle + i\sum_{m(\neq n)}\left\{\langle m(\mathbf{R}(t))\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|n(\mathbf{R}(t))\rangle\right\}\cdot|m(\mathbf{R}(t))\rangle \tag{7}$$

比较(7)式的两端，并注意到态矢集合 $\{|m(\mathbf{R}(t))\rangle;(m=1,2,\cdots,n,\cdots)\}$ 为线性无关的一组集合，便得出微分方程式(7)[或(6)]的成立还需要涉及到"某种条件"：

(i)"严格"条件　在整个演变过程中，不应存在态矢 $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ 向其他态矢的变化跃迁；亦即，态矢变化跃迁矩阵元

$$\langle m(\mathbf{R}(t))\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|n(\mathbf{R}(t))\rangle = 0 \qquad (m\neq n, 0\leqslant t\leqslant T) \tag{8}$$

此时，微分方程式(7)[或(6)]"严格"成立。

（ii）绝热近似条件　在整个演变过程中，存在态矢 $|n(\boldsymbol{R}(t))\rangle$ 向其他态矢的变化跃迁，但变化跃迁只能是"十分微弱"（以致于"无限微弱"）；亦即，态矢变化跃迁矩阵元

$$\langle m(\boldsymbol{R}(t))\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|n(\boldsymbol{R}(t))\rangle \sim 0(\text{以致于} \to 0) \qquad (m \neq n, 0 \leqslant t \leqslant T) \tag{9}$$

此时，微分方程式(7)[或(6)]绝热近似成立。

条件(i)和(ii)与是否能出现 Berry 几何相紧密相关、下面，将对这一条件作深入探讨。

2　Berry 几何相的出现与态矢的微弱变化跃迁因素

首先，对含时 Hamiltonian 量子系统在整个演变过程中，不存在态矢 $|n(\boldsymbol{R}(t))\rangle$ 向其他态矢的变化跃迁时，是否会出现具有实质意义的 Berry 几何相问题作进一步探讨。对于这种情形、由于条件(i)[参见(8)式]成立、进而可以得出(6)式与如下关系式完全等价：

$$|n(\boldsymbol{R}(t))\rangle = \exp\left\{\int_0^t f(t')\mathrm{d}t'\right\}\cdot|n(\boldsymbol{R}(t))\rangle; [f(t) = -i\dot{\gamma}_n(t)] \tag{10}$$

于是，利用(3)，可以得到 $t=0$ 时刻的态矢 $|n(\boldsymbol{R}(0))\rangle$ 也可以满足任意时刻 t 的瞬时能量本征方程：

$$\hat{H}(\boldsymbol{R}(t))\cdot|n(\boldsymbol{R}(0))\rangle = E_n(\boldsymbol{R}(t))\cdot|n(\boldsymbol{R}(0))\rangle \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{11}$$

下面，首先证明：对于通常的含时 Hamiltoniam 系统，若满足条件(ii)，则算符 $\hat{H}(\boldsymbol{R}(t))$ 是可对易的：

$$[\hat{H}(\boldsymbol{R}(t_1)), \hat{H}(\boldsymbol{R}(t_2))] = 0 \qquad (0 \leqslant t_1 \text{ 和 } t_2 \leqslant T) \tag{12}$$

1）$\hat{H}(\boldsymbol{R}(t))$ 为 Hilbert 空间中的通常含时 Hamiltonian 算符：

$$\hat{H}(\boldsymbol{R}(t)) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R}(t)) \tag{13}$$

此时，$|n(\boldsymbol{R}(0))\rangle$ 应为 Hilbert 空间的状态——不妨表为 $\varphi(\boldsymbol{x})$；因而，由(11)式应得到

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R}(t))}{E_n(\boldsymbol{R}(t))}\right]\right\}\cdot\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$$

即

$$\left[\frac{\partial V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R}(t))}{\partial t} - \dot{E}_n(\boldsymbol{R}(t))\right]\cdot\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$$

其中，方括符[…]里已为 C－数；因而，[…]＝0，于是，含时势 $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R}(t))$ 具有如下形式：

$$V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R}(t)) = U(\boldsymbol{x}) + F(\boldsymbol{R}(t)) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{14a}$$

其中

$$F(\boldsymbol{R}(t)) = [E_n(\boldsymbol{R}(t)) - E_n(\boldsymbol{R}(0))] + F(0); \qquad F(0)\text{ 为初值(常数)} \tag{14b}$$

显然、满足(14a, b)的 Hamiltoniam 算符(13)，也满足对易关系(12)．

2）$\hat{H}(\boldsymbol{R}(t))$ 为自旋空间中的通常的含时 Hamiltonian 算符：

$$\hat{H}(\boldsymbol{R}(t)) = -\mu[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}(t))\cdot\hat{\boldsymbol{S}}]$$
$$[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}(t)) = \sum_{i=1}^{3}B_i(\boldsymbol{R}(t))\boldsymbol{e}_i, \hat{\boldsymbol{S}} = \sum_{i=1}^{3}\hat{S}_i\boldsymbol{e}_i] \tag{15}$$

其中，一旦表象选定(例如取($\hat{S}^2$, $\hat{S}_3$)表象)后，各自旋投影算符 $\hat{S}_i$($i=1,2,3$)均是$[(2j+1)\times(2j+1)]$的矩阵(j是自旋量子数)，而$|n(\mathbf{R}(0))\rangle$应表为$(2j+1)$维的列矩阵：

$$|n(\mathbf{R}(0))\rangle=\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_{2j+1}\end{bmatrix}$$

由(11)式应得出

$$-\mu\left\{\sum_{i=1}^{3}\frac{B_i(\mathbf{R}(t))}{E_n(\mathbf{R}(t))}\cdot\hat{S}_i\right\}\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_{2j+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_{2j+1}\end{bmatrix}\tag{16}$$

引入Hilbert空间中的方向矢量：

$$e(t)=\frac{1}{\sqrt{A_1^2(t)+A_2^2(t)+A_3^2(t)}}\cdot\sum_{i=1}^{3}A_i(t)\cdot e_i$$

其中
$$A_i(t)=-\mu\left[\frac{B_i(\mathbf{R}(t))}{E_n(\mathbf{R}(t))}\right]\qquad(i=1,2,3)$$

于是，可将(16)式表为

$$[e(t)\cdot\hat{\mathbf{S}}]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_{2j+1}\end{bmatrix}=\lambda\cdot h\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_{2j+1}\end{bmatrix};\left[\lambda=\frac{1}{(\sqrt{A_1^2(t)+A_2^2(t)+A_3^2(t)})\cdot h}\right]\tag{17}$$

(17)式表明，不依赖于时间t的状态$|n(\mathbf{R}(0))\rangle$恰好是在($\hat{S}^2$, $\hat{S}_3$)表象中自旋算符$\hat{\mathbf{S}}$沿Hilbert空间中$e(t)$方向投影的本征态，且本征值为λh.

注意到$\lambda>0$；于是，根据量子力学角动量理论，λ只能出现在如下正量子数中：

$$j,j-1,\cdots,\begin{cases}1;(\text{若粒子属于玻色子})\\ 1/2;(\text{若粒子属于费米子})\end{cases}\tag{18}$$

此外，注意到$A_1(t)$，$A_2(t)$和$A_3(t)$是3个连续函数；因而，λ只能取(18)中的某一个值、于是，状态$|n(\mathbf{R}(0))\rangle$只能是自旋$\hat{\mathbf{S}}$沿Hilbert空间中的某一固定方向：$e=\cos\alpha_1 e_1+\cos\alpha_2 e_2+\cos\alpha_3 e_3$；($\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$不含时间$t$)投影的本征态，且本征值为$\lambda h$. 这将表明：$e(t)=e$，由此便得到

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}(t))=\left[-\frac{E_n(\mathbf{R}(t))}{\mu\lambda h}\right]\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cdot e_i\tag{19}$$

显然，满足(19)的Hamiltonian算符(15)，也满足对易关系式(12).

3) $\hat{H}(\mathbf{R}(t))$为Hilbert空间与自旋空间存在非耦合情形的通常含时Hamiltonian算符：

$$\hat{H}(\mathbf{R}(t))=\left[\frac{-h^2}{2m}\nabla^2+V(x,\mathbf{R}_x(t))\right]-\mu\cdot\mathbf{B}(\mathbf{R}_s(t))\cdot\hat{\mathbf{S}}\qquad(\text{自旋取}(\hat{S}^2,\hat{S}_3)\text{表象})\tag{20}$$

其中，$\mathbf{R}_x$和$\mathbf{R}_s$分别表示在Hilbert空间和自旋空间里所引进的参数空间$[\mathbf{R}_x\cup\mathbf{R}_s=\mathbf{R}]$. 此时，可首先将态矢$|n(\mathbf{R}(0))\rangle$按Hilbert空间和自旋空间作分离：

$$|n(\mathbf{R}(0))\rangle=|n(\mathbf{R}(0))\rangle_x\cdot|n(\mathbf{R}(0))\rangle_s$$

其中 $|n(\mathbf{R}(0))\rangle_x = \varphi(x)$, $|n(\mathbf{R}(0))\rangle_s = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_{2j+1} \end{bmatrix}$

然后,由(11)式应得到

$$\left\{ \frac{\left[\frac{-h^2}{2m}\nabla^2 + V(x, \mathbf{R}_x(t))\right]\cdot \varphi(x)}{\varphi(x)} - \mu[\mathbf{B}(\mathbf{R}_s(t))\cdot \hat{\mathbf{S}}] \right\} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_{2j+1} \end{bmatrix} = E_n(\mathbf{R}(t))\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_{2j+1} \end{bmatrix} \tag{21}$$

(21)式的成立即要求

$$\frac{\left[\frac{-h^2}{2m}\nabla^2 + V(x, \mathbf{R}_x(t))\right]\cdot \varphi(x)}{\varphi(x)} = E_{n_1}(\mathbf{R}_x(t)) \tag{22a}$$

和 $$-\mu[\mathbf{B}(\mathbf{R}_s(t))\cdot \hat{\mathbf{S}}]\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_{2j+1} \end{bmatrix} = E_{n_2}(\mathbf{R}_s(t))\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_{2j+1} \end{bmatrix} \tag{22b}$$

且 $$E_{n_1}(\mathbf{R}_x(t)) + E_{n_2}(\mathbf{R}_s(t)) = E_n(\mathbf{R}(t)) \tag{22c}$$

将上面关于1)和2)的讨论结果分别用于(22a)和(22b)后,则不难得出

$$V(x, \mathbf{R}_x(t)) = U(x) + F(\mathbf{R}_x(t)); \{F(\mathbf{R}_x(t)) = [E_{n_1}(\mathbf{R}_x(t)) - E_{n_1}(\mathbf{R}_x(0))] + F(0)\} \tag{23a}$$

和 $$B(\mathbf{R}_s(t)) = \left[-\frac{E_{n_2}(\mathbf{R}_s(t))}{\mu\lambda h}\right]\cdot \sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cdot e_i \quad (\lambda\text{ 取(18)中的某一个值}) \tag{23b}$$

显然,满足(23a, b)的 Hamiltonian 算符(20),也满足对易关系式(12). 证毕

当含时 Hamiltonian 算符 $\hat{H}(\mathbf{R}(t))$ 满足(12)时,必存在指数算符形式的时间演化算符

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{h}\int_{t_0}^{t}\hat{H}(\mathbf{R}(t'))\mathrm{d}t'\right\} \qquad (0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T$$

于是,满足(1)的"演变"状态 $|\Psi(t)\rangle$ 可以表为

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t,0)\cdot|\Psi(0)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^t E_n(\mathbf{R}(t'))\mathrm{d}t'\right\}\cdot|n(\mathbf{R}(0))\rangle \qquad (0\leqslant t\leqslant T)$$

[其中,利用了 $|\Psi(0)\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle$],这样,系统在整个循环演变过程中($0\leqslant t\leqslant T$),仅产生出动力学相因子。据此,可以得出这样一个重要结论:对于通常的含时 Hamiltonian 系统,当满足循环周期条件[$\hat{H}(\mathbf{R}(T)) = \hat{H}(\mathbf{R}(0))$]时、若在整个演变过程中($0\leqslant t\leqslant T$),不存在态矢 $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ 向其他态矢的变化跃迁,则不会产生具有"实质意义"的 Berry 几何相 $\gamma_n(C)\neq 2k\pi$(k 为整数)。

上述结论对于满足循环周期条件的"一般"的含时 Hamiltonian 系统来讲也成立。下面,对此给出一般的证明:

对于由方程(3)所得到的 $E_n(\mathbf{R}(t))$ 能级上的态矢 $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$，在满足瞬时正交归一关系 $\langle m(\mathbf{R}(t))|n(\mathbf{R}(t))\rangle = \delta_{nm}$ 的条件下，仍然应存在无穷多种选取方案：

$$|n(\mathbf{R}(t))\rangle_1,\quad |n(\mathbf{R}(t))\rangle_2,\cdots,|n(\mathbf{R}(t))\rangle_k,\cdots, \tag{24}$$

其中，$|n(\mathbf{R}(t))\rangle_j = e^{i\alpha_{ij}^{(n)}(t)}\cdot|n(\mathbf{R}(t))\rangle_i$；[$i$ 和 $j = 1,2,\cdots$，且 $i\neq j$]，且 $\alpha_{ij}^{(n)}(t) = \alpha_{ij}^{(n)}(t)(\neq 0)$ 为实函数(包括常数函数)。

由于 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 满足周期含时规范变换下的不变性，因而要求任意一组态矢的选取：$|n(\mathbf{R}(t))\rangle_k$ 还必须满足周期性条件 $|n(\mathbf{R}(T))\rangle_k = |n(\mathbf{R}(0))\rangle_k$；于是，$\alpha_n^{(n)}(t)$ 也应满足周期性 $\alpha_n^{(n)}(T) = \alpha_n^{(n)}(0)$.

对于在整个演变过程中($0\leqslant t\leqslant T$)，不存在态矢 $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ 向其他态矢的变化跃迁时，(10)式即成立；据此，无论选取态矢 $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ 为(24)中的哪一组[$|n(\mathbf{R}(t))\rangle = |n(\mathbf{R}(t))\rangle_k$，($k = 1,2,\cdots$)]来计算 Berry 几何相 $\gamma_n(T)\Rightarrow\gamma_n(C)$，均可以从(10)式中导出

$$\int_0^T f(t')\mathrm{d}t' = 2k\pi\cdot i\quad [\text{其中 } f(t') = -i\dot{\gamma}_n(t'),\ |n(\mathbf{R}(T))\rangle_k = |n(\mathbf{R}(0))\rangle_k]$$

即 $\gamma_n(C)\Rightarrow 2k\pi$[$k$ 为整数，$\gamma_n(0)$ 已取为零]，这表明，不会出现具有"实质意义"的 Berry 几何相 $\gamma_n(C)\neq 2k\pi$(k 为整数)。

具有"实质意义"的 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$，既然不可出现于严格条件(i)[参见(8)式]中(这点已由以上的分析讨论表明)，则这样的位相 $\gamma_n(C)$ 便只能出现于绝热近似的条件(ii)[参见(9)式]中了，而此条件又表明：在演变过程中，必须存在态矢 $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ 向其他态矢的"十分微弱"(以致于"无限微弱")的变化跃迁。这无疑揭示出具有"实质意义"的 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的产生，不仅总是与态矢 $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ 向其他态矢的"无限微弱"变化跃迁的存在相关联，而且也应该是由这种跃迁因素所产生出的一种动力学效应的体现，对此，还可以用具体范例[参见附录]给予进一步解释说明。

3　小结

具有"实质意义"的 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的产生，总是需要一定的物理背景条件的 —— 即态矢变化跃迁，而这一条件又进一步揭示出这种位相 $\gamma_n(C)$ 的产生机制应是动力学机制 —— 由态矢的"无限微弱"变化跃迁的动力学效应，才会导致出具有"实质意义"的 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的严格产生。

附录：Berry 几何相计算范例*

Ⅰ. 处于周期振动磁场 $\mathbf{B}(t) = B\cdot\cos\omega t\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cdot\mathbf{e}_i$ 中的运动电子自旋系统，为如下二能级系统

$$\varepsilon_m(t) = (-1)^m\cdot\mu_e\cdot B\cos\omega t$$

$$|\phi_m(t)\rangle = \sqrt{\frac{1+(-1)^{m+1}\cdot\cos\alpha_3}{2}}\begin{bmatrix} e^{i\varphi_m(t)} \\ (-1)^{m+1}\dfrac{\cos\alpha_1 + i\cos\alpha_2}{1+(-1)^{m+1}\cdot\cos\alpha_3}\cdot e^{i\varphi_m(t)} \end{bmatrix} \tag{Ⅰ-1}$$

---

* 在计算中不作参数化[$t\rightarrow\mathbf{R}(t)$]处理，计算实质相同。

其中，$\varphi_m(t+T)=\varphi_m(t)$；$\left\{T=\frac{2\pi}{\omega},\ m=1,2\right\}$. 作为范例，考察演变态 $|\Psi(t)\rangle$；$[|\Psi(0)\rangle=|\psi_1(0)\rangle$，$|\Psi(T)\rangle=e^{i\phi(T)}|\psi_1(T)\rangle]$. 可以确定 $\langle\psi_2(t)|\dot{\psi}_1(t)\rangle=0$［参见(8)式］；因而应有 $\gamma_1(C)=2k\pi$ 或简单地表成 $\gamma_1(C)=0$. 采用 Berry 公式(5) 也可获得同样的计算结果

$$\gamma_1(C)=i\int_0^T\langle\psi_1(t)|\dot{\psi}_1(t)\rangle\mathrm{d}t=0\qquad[\text{利用了 }\varphi_1(T)=\varphi_1(0)]\tag{Ⅰ-2}$$

Ⅱ. 处于绕 e_3 定轴匀速旋转磁场 $\mathbf{B}(t)=B[(\sin\theta\cdot\cos\omega t)e_1+(\sin\theta\cdot\sin\omega t)e_2+\cos\theta e_3]$，$(0<\theta<\pi)$ 中的运动电子自旋系统，为如下二能级系统

$$\varepsilon_m(t)=(-1)^{m+1}\cdot\mu_e\cdot B,\qquad|\psi_m(t)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+(-1)^{m+1}\cdot\cos\theta}}\cdot e^{i\varphi_m(t)}\\(-1)^{m}\cdot\sqrt{1+(-1)^{m+1}\cdot\cos\theta}\cdot e^{i[\varphi_m(t)+\omega t]}\end{bmatrix}\tag{Ⅱ-1}$$

其中，$\varphi_m(t+T)=\varphi_m(t)$；$\left\{T=\frac{2\pi}{\omega},\ m=1,2\right\}$ 作为范例，考察演变态 $|\Phi(t)\rangle$；$[|\Phi(0)\rangle=|\psi_1(0)\rangle$，$|\Phi(T)\rangle=e^{i\phi(T)}|\psi_1(T)\rangle]$. 可以确定 $\langle\psi_2(t)|\dot{\psi}_1(t)\rangle\sim0$（以致于 $\to0$）［当 $\omega\sim0$（以致于 $\to0$）时］——参见(9) 式，因而应有 $\gamma_1(C)\neq2k\pi$，采用 Berry 公式(5) 可计算出

$$\gamma_1(C)=i\int_0^T\langle\psi_1(t)|\dot{\psi}_1(t)\rangle\mathrm{d}t=-(1+\cos\theta)\pi\qquad[\text{利用了 }\varphi_1(T)=\varphi_1(0)]\tag{Ⅱ-2}$$

Berry 几何相(Ⅱ-2) 是如何产生的？为探讨此问题，则需要首先严格求解出演变态 $|\Phi(t)\rangle$（求解略）：

$$|\Phi(t)\rangle=\sum_{k=+,-}A_k\cdot|\Psi_k(t)\rangle;\quad[|\Psi_+(t)\rangle\text{ 和 }|\Psi_-(t)\rangle\text{ 为系统完备解集}]\tag{Ⅱ-3a}$$

其中

$$A_\pm=\pm\frac{e^{i\varphi_1(0)}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(E-\alpha_\mp)\cdot\sqrt{1-\cos\theta}\cdot\sqrt{\alpha_\pm^2+2\alpha_\pm\cdot E\cos\theta+E^2}}{E\cdot\sin\theta\cdot\sqrt{\omega^2-4E\omega\cdot\cos\theta+4E^2}}$$

$$|\Psi_\pm(t)\rangle=\frac{E\cdot\sin\theta\cdot e^{i\alpha_\pm t}}{\sqrt{\alpha_\pm^2+2\alpha_\pm E\cos\theta+E^2}}\begin{vmatrix}1\\-\dfrac{\alpha_\pm+E\cdot\cos\theta}{E\cdot\sin\theta}\cdot e^{i\omega t}\end{vmatrix}\left[\alpha_\pm=\frac{-\omega\pm\sqrt{\omega^2-4E\omega\cos\theta+4E^2}}{2}\right]\tag{Ⅱ-3b}$$

$$\omega\Rightarrow\omega_n=\frac{2E}{n^2-1}\left(-\cos\theta+\sqrt{n^2-\sin^2\theta}\right)\qquad(n=2,3,\cdots)$$

计算(略) 出 $\gamma_{非动力学}(T)=\beta(T)-\gamma_{动力学}(T)$ 为

$$\gamma_{非动力学}(T)=\mathrm{tg}^{-1}\left\{\frac{A_+\cdot L_+\cdot\sin(\alpha_+T)+A_-L_-\sin(\alpha_-T)}{A_+\cdot L_+\cdot\cos(\alpha_+T)+A_-L_-\cos(\alpha_-T)}\right\}-$$

$$|A_+|^2\cdot[(\alpha_+T)+2\pi F_+]-|A_-|^2\cdot[(\alpha_-T)+2\pi\cdot F_-]\quad\left(T=\frac{2\pi}{\omega_n}\right)\tag{Ⅱ-4a}$$

其中

$$L_\pm=\frac{e^{-i\varphi_1(0)}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(E+\alpha_\pm)\cdot\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{\alpha_\pm^2+2\alpha_\pm E\cos\theta+E^2}},\qquad F_\pm=\frac{\alpha_\pm^2+2\alpha_\pm E\cdot\cos\theta+E^2\cdot\cos^2\theta}{\alpha_\pm^2+2\alpha_\pm E\cdot\cos\theta+E^2}\tag{Ⅱ-4b}$$

对于"足够缓慢"演变（$\omega_n\sim0$，即 $n\gg1$）情形，可对(Ⅱ-4a, b) 作近似处理：$\alpha_\pm\sim\pm E$，$A_+\sim e^{i\varphi_1(0)}$，$A_-\sim0$，$F_\pm\sim\frac{1}{2}(1\pm\cos\theta)$；于是，$\gamma_{非动力学}(T)$ 存在如下近似关系：

$$\gamma_{非动力学}(T)\sim\gamma_1(C);[\gamma_1(C)=-(1+\cos\theta)\pi\text{——参见(Ⅱ-2)}]\tag{Ⅱ-5}$$

(Ⅱ-5) 所表出的近似程度将随 $\omega_n\to0$ 而趋于精确；因而，$\gamma_1(C)$ 是因 $\omega_n\to0$ 而致使态矢的变化跃迁

趋于"无限微弱"$\langle \psi_2(t) | \dot{\psi}_1(t) \rangle \xrightarrow{(\omega_n \to 0)} 0$ 时，由 $\gamma_{非动力学}(T)$ 中的动力学因素(态矢的变化跃迁)的极限效应所导致。

参 考 文 献

[1] BERRY M V. Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes[J]. Proc. Rog. Soc. Lond. A, 1984, 392:45～57.

[2] BITTER T, DUBBERS D. Manifestation of Berry's Topological Phase in Neutron Spin Rotation[J]. Phys. Rev. Lett, 1987, 59(3):251～254.

[3] CHIAO R Y, WU Y S. Manifestations of Berry's Topological Phase for the Photon[J]. Phys. Rev. Lett, 1986, 57(8):933～936.

[4] DELACR ETAZ G, GRANT E R. Fractional Quantization of Molecular Pseudorotation in Na_3. Phys. Rev. Lett, 1986, 56(24):2 598～2 601.

[5] ZAK J. Berry's Phase in the effective-Hamiltonian theory of Solids[J]. Phys. Rev. B, 1989, 40(5):3 156～3 161.

[6] LI H Z. Induced Gauge Fields in a Nongauged Quantum System[J]. Phys. Rev. Lett, 1987, 58(6):539～542

[7] ISLER K, PARANJAPE M B. Berry's Connection for Non-Abelian, Chiral Fermions[J]. Phys. Rev. D, 1990, 41(2):561～563

[8] ZENG J Y, LEI Y A. Berry Phase and Nonstationarity of a Quantum State[J]. Phys. Rev. A, 1995, 51(6):4 415～4 418.

[9] NI G J, CHEN S Q, SHEN Y L. Geometric Phase in Spin Precession and the Adiabatic Approximation[J]. Phys. Lett. A, 1995, 197:100～106

[10] CHEN S Q, NI G J. Existence of a Geometric Phase in a Coherent State[J]. Phys. Lett. A, 1993, 178:339～341.

Dynamic Mechanism of the Production of Berry Geometric Phase —— State Vector's "Infinite Weak" Change Transition

ZHANG Zhong-can, FANG Zheng-yun, HU Chen-guo, SUN Shi-jun

(College of Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

ABSTRACT: A meaningful discussion on the "physical background" of the state vector's change transition that can obtain Berry geometric phase having material significance: $\gamma_n(C) \neq 2k\pi$; (k is an int eger) is presented. The result shows that the state vector's "infinite weak" change transition is just the dynamical mechanism of the production of Berry geometric phase having material significance.

KEYWORDS: adiabatic approximation; Berry geometric phase; circular periodic evolution; state vector's change transition

(责任编辑　刘尚坤)