

文章编号:1000-582x(1999)06-0086-07

①

粘弹性索非线性响应及动力稳定性

86-91

李映辉¹, 李宾², 殷学刚^{1*}

(1. 重庆大学 建筑工程学院, 重庆 400044; 2. 后勤工程学院, 重庆 400041)

TU501

0322

摘要:根据 Revlon 材料的一维本构方程及索的运动方程导出了粘弹性索在重力作用下, 面内和面外的偏微分运动方程。利用 Galerkin 方法将偏微分方程转化为一组非线性常微分方程。给出了粘弹性索的动力稳定性分析方法。通过数值仿真研究说明了弹性和粘性参数对索的动态响应的影响。

关键词:粘弹性索; Revlon 材料; Galerkin 方法; 动力响应; 动力稳定性

中图分类号: TU 501; TU 511.3⁺2

文献标识码: A

非线性响应

索由于其高强度、轻质量、柔性很大、固有阻尼小在工程中被广泛应用。它可用来支承结构, 传输材料, 拖动车辆等。对索的非线性振动分析已引起了很多科学工作者和工程技术人员的兴趣。Wamitchai, Fujino 和 Susumpow 导出了小垂度斜拉索振动的非线性动力学方程^[1], Perkins 和 Mote 研究了运动弹性索在三维空间振动的动态响应^[2], Takahashi 和 Konishi 分别讨论了弹性索在三维空间的自由振动和简谐力作用下的强迫振动^[3], Huang 研究了运动弦在三维空间的动态稳定性等问题^[4]。所有的非线性分析都是在假设材料为线弹性条件的几何非线性分析。但是, 随着新的塑性材料和复合材料在工程上的广泛应用, 为了克服金属索过重而引起的大垂度, 以及金属索易于生锈被腐蚀的缺点, 工程中已经出现了材料为非线弹性的索和弦(如混杂纤维复合材料, 玻璃纤维复合材料和碳纤维复合材料索等)[5]。因此对索同时进行几何非线性和材料非线性分析不仅具有重要理论意义, 而且也有重大的工程价值。

粘弹性材料是一种重要的非线性弹性材料, 在等温小应变情况下, 可以分别用 Maxwell, Voigt 和三参数标准粘弹性固体模型等进行描述。Revlon 材料是一种典型的可以用三参数标准粘弹性固体模型描述的材料。

笔者根据 Revlon 材料的一维本构方程及索的运动方程导出了粘弹性索在重力作用面内和面外的非线性偏微分运动方程。然后利用 Galerkin 方法将偏微分方程转化为一组非线性常微分方程。给出了粘弹性索动力稳定性分析方法。最后, 通过数值仿真研究说明了弹性和粘性参数对索的动态响应的影响。

* 收稿日期: 1999-04-05

作者简介: 李映辉(1964-), 男, 四川南江人, 重庆大学建筑工程学院讲师, 博士生, 主要从事振动控制方面的研究。

** 重庆大学机械传动国家重点实验室研究人员。

1 控制微分方程

1.1 静态平衡构形

如图 1, 假设所研究的索是均匀, 轴向应变很小, 轴向应力在横截面均匀分布, 横截面积为 A , 长度为 L , 索与水平线夹角为 θ , 质量密度为 ρ . 由于材料的弹性模量很高, 因此可以认为索的静态平衡构形在重力作用面内为抛物线, 于是

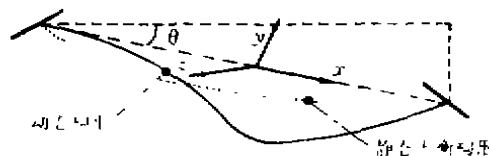


图 1 索的静、动态构形

$$w^{(s)} = \frac{1}{2}(\gamma L^2 / \sigma^{(s)})[(x/L) - (x/L)^2] \quad u^{(s)} = 0 \quad v^{(s)} = 0 \quad (1)$$

其中, $u^{(s)}$ 、 $v^{(s)}$ 、 $w^{(s)}$ 分别为静态平衡构形中索在轴向, 面外和面内的位移, $\sigma^{(s)}$ 为静态平衡构形中索的轴向应力, γ 为索的重力在 y 轴方向的分量, 即:

$$\gamma = \rho g \cos \theta \quad (2)$$

其中, g 是重力加速度常量 (9.81 m/s^2).

1.2 运动方程

索运动的偏微分方程可以根据静态轴向应力 $\sigma^{(s)}$ 、动态轴向应力 σ 、索的轴向位移 u 、面外位移 r_1 、面内位移 r_2 , 在 x, y, z 方向的分布力 X, Y, Z 表示为^[1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\sigma^{(s)} + \sigma) \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \right\} + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\sigma^{(s)} + \sigma) \frac{\partial r_1}{\partial x} + \sigma \right\} + Y = \rho \frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\sigma^{(s)} + \sigma) \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x} \right\} + Z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5)$$

在 x 轴方向的 Lagrangian 应变分量可以用位移 u, r_1, r_2 表示为:

$$\epsilon(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x} \frac{\partial r_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_2}{\partial x} \right)^2 \quad (6)$$

方程(3)~(6)完全描述了索的运动。为便于分析, 将得到的更加简单的模型, 进行如下合理的简化。由于张紧索的轴向惯性力很小可以忽略, 并假设分布力 X 为 0, 根据上述两个假设, 它与位移 u 相关的应变很小, 方程(3)、(6)分别简化为:

$$\partial \sigma / \partial x = 0 \quad (7)$$

$$\epsilon(x, t) = \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x} \frac{\partial r_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_2}{\partial x} \right)^2 \quad (8)$$

1.3 Reylon 材料本构方程

Reylon 材料的一维本构方程为^[6]:

$$\sum_{j=0}^p a_j \frac{d^j \sigma}{dt^j} = \sum_{j=0}^p b_j \frac{d^j \epsilon}{dt^j} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 1) \quad (9)$$

方程(9)也可表示为:

$$A\sigma = B\epsilon \quad (10)$$

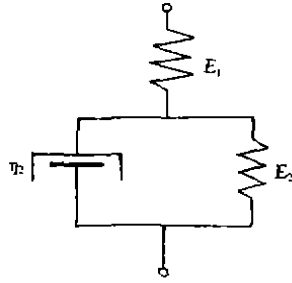


图2 线性粘弹性材料模型

其中算子 A 和 B 定义如下:

$$A = \sum_{j=0}^R a_j \frac{d^j}{dt^j}$$

$$B = \sum_{j=0}^P b_j \frac{d^j}{dt^j}$$

选择如图 2 所示的三参数模型, 其线性粘弹性材料的微分本构关系为:

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma = E_1 \dot{\epsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \epsilon \quad (11)$$

将方程(11)与方程(9)对比得到

$$a_1 = (E_1 + E_2)/\eta, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = E_1 E_2/\eta, \quad b_1 = E_1, \quad R = 1, \quad P = 1$$

对方程(4)(5)分别作用微分算子 A, 并使用方程(7)(8)(10)得到由位移 u, w 表示的运动控制偏微分方程及位移边界条件:

$$\begin{aligned} a_0 \sigma^{(j)} r_{1x} + b_0 u_x \left(w_x^{(j)} r_{2x} + \frac{1}{2} r_{2x}^2 \right) + b_1 u_x \left(w_x^{(j)} r_{2x} + r_{1x} r_{1x} + r_{2x} r_{2x} \right) + \\ b_0 u_x \left(w_x^{(j)} r_{2x} + w_x^{(j)} r_{2x} + r_{2x} r_{2x} \right) + b_1 r_{1x} \left(w_x^{(j)} r_{2x} + w_x^{(j)} r_{2x} + r_{1x} r_{1x} + \right. \\ \left. r_{1x} r_{1x} + r_{2x} r_{2x} + r_{2x} r_{2x} \right) + a_0 Y = a_0 \rho r_{1u} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} a_0 \sigma^{(j)} r_{2x} + b_0 r_{2x} \left(w_x^{(j)} r_{2x} + \frac{1}{2} r_{1x}^2 + \frac{1}{2} r_{2x}^2 \right) + b_1 r_{2x} \left(w_x^{(j)} r_{2x} + r_{1x} r_{1x} + r_{2x} r_{2x} \right) + \\ b_0 r_{2x} \left(w_x^{(j)} r_{2x} + w_x^{(j)} r_{2x} + r_{1x} r_{1x} + r_{2x} r_{2x} \right) + b_1 r_{2x} \left(w_x^{(j)} r_{2x} + w_x^{(j)} r_{2x} + r_{1x} r_{1x} + \right. \\ \left. r_{1x} r_{1x} + r_{2x} r_{2x} + r_{2x} r_{2x} \right) + w_x^{(j)} \left[b_0 \left(w_x^{(j)} r_{2x} + \frac{1}{2} r_{1x}^2 + \frac{1}{2} r_{2x}^2 \right) \right. \\ \left. b_1 \left(w_x^{(j)} r_{2x} + r_{1x} r_{1x} + r_{2x} r_{2x} \right) \right] + a_0 Y = a_0 \rho r_{2u} \end{aligned} \quad (13)$$

$$r_0(0, t) = r_1(L, t) = r_2(0, t) = r_2(L, t) = 0 \quad (14)$$

其中 $(\cdot)_x = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$, $(\cdot)_{xx} = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}$

2 非线性动力响应分析

定义无量纲参数

$$V = \frac{r_1}{L}, \quad W = \frac{r_2}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad c_1 = \sqrt{E_2/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{\sigma^{(j)}/\rho}, \quad \tau = \frac{c_2 t}{L},$$

$$k_1 = \frac{E_1 E_2 L}{\rho \eta c_2^3}, \quad k_2 = \frac{c_1}{c_2}, \quad k_3 = \frac{E_1 + E_2}{\eta c_2} L, \quad \lambda = \frac{g \cos \theta}{c_2^2}, \quad W^{(j)} = \frac{w^{(j)}}{\lambda L}$$

于是方程(1), (12) ~ (14) 变为

$$W^{(j)} = \frac{1}{2} (\xi - \xi^2) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} k_3 V_{\xi\xi} + k_1 V_{\xi\xi} \left(W_{\xi}^{(j)} W_{\xi} + \frac{1}{2} V_{\xi}^2 + \frac{1}{2} W_{\xi}^2 \right) + k_2^2 V_{\xi\xi} \left(W_{\xi\xi}^{(j)} W_{\xi\xi} + \right. \\ \left. W_{\xi\xi}^{(j)} W_{\xi\xi} + W_{\xi\xi}^{(j)} W_{\xi\xi} + V_{\xi\xi} V_{\xi\xi} + V_{\xi} V_{\xi\xi} + W_{\xi\xi} W_{\xi\xi} + W_{\xi} W_{\xi\xi} \right) = V_{\xi\xi} \end{aligned} \quad (16)$$

$$k_3 W_{\xi\xi} + k_1 W_{\xi\xi} \left(W_{\xi}^{(j)} W_{\xi} + \frac{1}{2} V_{\xi}^2 + \frac{1}{2} W_{\xi}^2 \right) + k_2^2 W_{\xi\xi} \left(W_{\xi\xi}^{(j)} W_{\xi\xi} + V_{\xi} V_{\xi\xi} + W_{\xi} W_{\xi\xi} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & k_1 W_\xi (W_\xi^{(1)} W_\xi + W_\xi^{(2)} W_\xi + V_\xi V_\xi + W_\xi W_\xi) + k_2 W_\xi (W_\xi^{(1)} W_\xi + W_\xi^{(2)} W_\xi + V_\xi V_\xi + \\
 & V_\xi V_\xi + W_\xi W_\xi + W_\xi W_\xi) + W_\xi^{(1)} \left[k_1 \left(W_\xi^{(1)} W_\xi + \frac{1}{2} V_\xi^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} W_\xi^2 \right) + k_2 (W_\xi^{(1)} W_\xi + V_\xi V_\xi + W_\xi W_\xi) \right] = W_\xi \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$V(0, \tau) = V(1, \tau) = W(0, \tau) = W(1, \tau) = 0 \quad (18)$$

由于方程(16), (17) 不能精确求解, 为得到近似解, 使用 Galerkin 方法分离变量, 于是令:

$$\left. \begin{aligned}
 V(\xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \sin(n\pi\xi) \\
 W(\xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\tau) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\tau) \sin(n\pi\xi)
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

代入方程(16), (17) 并利用三角函数的正交性得到

$$\begin{aligned}
 \ddot{f}_m + \sum_{i=1}^{\infty} A_{mi} f_i + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (B_{mij} f_i g_j + C_{mij} f_i \dot{g}_j) + \\
 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (E_{mijk} f_i f_j f_k + E_{mijk} f_i g_j g_k + F_{mijk} f_i f_j \dot{f}_k + F_{mijk} f_i g_j \dot{g}_k) = 0 \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{g}_m + \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{A}_{mi} g_i + \bar{A}_{mi} \dot{g}_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{B}_{mij} g_i g_j + \bar{C}_{mij} f_i f_j + \bar{D}_{mij} g_i \dot{g}_j + \bar{D}_{mij} f_i \dot{f}_j) + \\
 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (E_{mijk} g_i f_j f_k + E_{mijk} g_i g_j g_k + \bar{F}_{mijk} g_i f_j \dot{f}_k + \bar{F}_{mijk} g_i g_j \dot{g}_k) = 0 \quad (21)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_{mi} &= -k_3 a_{mi}, \quad B_{mij} = -k_1 (b_{mij} + c_{mij}), \quad C_{mij} = -k_2 (2b_{mij} + d_{mij}) \\
 E_{mijk} &= -k_1 \left(\frac{1}{2} e_{mijk} + e_{mijk} \right), \quad F_{mijk} = -(k_2^2 e_{mijk} + k_1 e_{mijk} + k_1 e_{mijk}) \\
 \bar{A}_{mi} &= -k_3 a_{mi} - k_1 h_{mi}, \quad \bar{A}_{mi} = -k_2^2 h_{mi}, \quad \bar{B}_{mij} = -k_1 \left(2b_{mij} + \frac{3}{2} d_{mij} \right), \quad \bar{C}_{mij} = -\frac{1}{2} k_1 d_{mij}, \\
 \bar{D}_{mij} &= -2k_2^2 (b_{mij} + d_{mij}), \quad \bar{D}_{mij} = -k_2^2 d_{mij}, \quad \bar{F}_{mijk} = -k_2^2 (e_{mijk} + e_{mijk} + e_{mijk}), \\
 a_{mi} &= \int_0^1 \varphi_m \varphi_i' d\xi, \quad b_{mij} = \int_0^1 w_\xi^{(1)} \varphi_m \varphi_i' \varphi_j' d\xi, \quad c_{mij} = \int_0^1 w_\xi^{(2)} \varphi_m \varphi_i' \varphi_j' d\xi, \\
 d_{mij} &= \int_0^1 w_\xi^{(1)} \varphi_m \varphi_i' \varphi_j' d\xi, \quad e_{mijk} = \int_0^1 \varphi_m \varphi_i' \varphi_j' \varphi_k' d\xi, \quad h_{mi} = \int_0^1 (w_\xi^{(1)})^2 \varphi_m \varphi_i' d\xi
 \end{aligned}$$

3 动力稳定性分析

假设索的轴力为一周期函数的力, 即: $T = T_0 + T_1 \Psi(t) = T_0 + T_1 \cos \Omega t$, 对方程(5) 的两边分别作用微分算子 A , 并利用方程(7) 得到:

$$\begin{aligned}
 m(a_1 \ddot{r}_2 + \ddot{r}_2) - a_1 (T_0 + T_1 \Psi) r_{2xx} - \\
 [(T_0 + T_1 \Psi) = a_1 T_1 \Psi] r_{2xx} - T_1 (\Psi + a_1 \dot{\Psi}) w_{xx}^{(1)} = 0 \quad (22)
 \end{aligned}$$

其中, $m = \rho A$, $T_0 = \sigma^{(1)} A$, $\sigma = T_1 \Psi(t)/A$, Ω 为激励频率. 利用上述无量纲变量, 并将(19) 式代入(22) 式, 并利用模态函数的正交性得到:

$$\ddot{u}_i + \alpha \ddot{g}_i - (1 + h \cos \Omega t) T_0 \sum_{j=1}^{\infty} B_j \dot{g}_j - (\alpha + ah \cos \Omega t - h \Omega \sin \Omega t) T_0 \sum_{j=1}^{\infty} B_j g_j - h(\alpha \cos \Omega t - \Omega \sin \Omega t) T_0 C_i = 0 \quad (23)$$

其中 $\alpha = 1/\alpha_1$, $B_j = \int_0^1 \varphi_j \varphi_j'' d\xi$, $C_i = \int_0^1 W_{\xi}^{i,d} \varphi_i d\xi$, $h = T_1/T_0$

对于方程(23)中,忽略相互间的耦合,并仍用无下标的变量代替相应变量得到:

$$\ddot{g} + \alpha \ddot{g} - (1 + h \cos \Omega t) \beta \dot{g} - (\alpha + ah \cos \Omega t - h \Omega \sin \Omega t) \beta g - h(\alpha \cos \Omega t - \Omega \sin \Omega t) \delta = 0 \quad (24)$$

其中 $\beta = T_0 B_i$, $\delta = T_0 C_i$

方程(23)中, i 为奇数时, $\delta = T_0 C_i \neq 0$, 这时方程(24)中代表外激励最后一项 $h(\alpha \cos \Omega t - \Omega \sin \Omega t) \delta \neq 0$, 方程(24)为既有参数激励又有外激励的一种激振系统, 外激励是由索的垂度造成的; i 为偶数时, $\delta = 0$, 方程(24)为仅有参数激励的激振系统。因此, 研究粘弹性索的动力稳定性, 只需讨论三阶微分系统(24)的解的稳定性。

4 数值仿真与讨论

在以下的研究中, 取方程(20), (21)的前两阶特征函数, 应用四阶 Runge-Kutta 方法对方程(20), (21)进行数值积分。并研究材料参数分别对面内和面外位移响应的影响, 图3表示在初始条件 $f_1(0) = 0.01$, $f_2(0) = \dot{f}_1(0) = \dot{f}_2(0) = 0.0$, $g_1(0) = 0.01$, $g_2(0) = \dot{g}_1(0) = \dot{g}_2(0) = 0.0$ 的条件下, 并且 $k_1 = k_2 = 0$ 时, 在 $\xi = 0.5$ 处材料参数 k_3 在不同情况下的面外和面内的响应。可见, 无论面外与面内, 随着 k_3 的减小, 索的振幅也逐渐减小; 参数 k_3 的值越大, 粘弹性索越接近弹性索。

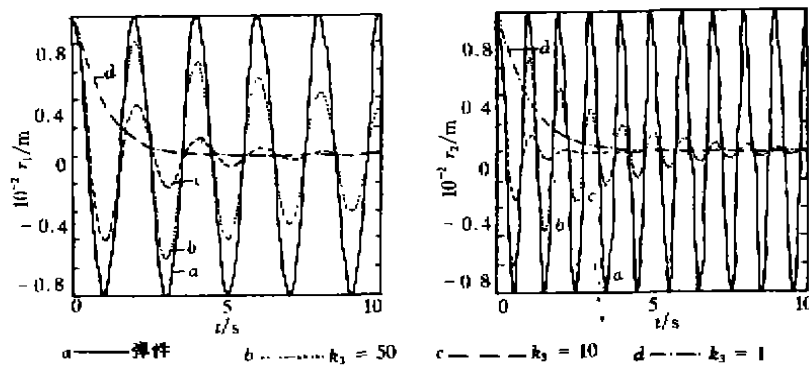


图3 面内外的响应

图4表示在初始条件 $f_1(0) = 0.05$, $f_2(0) = \dot{f}_1(0) = \dot{f}_2(0) = 0.0$, $g_1(0) = 0.05$, $g_2(0) = \dot{g}_1(0) = \dot{g}_2(0) = 0.0$ 的条件下, $k_1 = 2000$, $k_2 = 1000$ 时, 在 $\xi = 0.5$ 处材料参数 k_3 在不同情况下的面外和面内的响应。由此可见, 无论面外与面内, 随着 k_3 的增加, 索

的振动振幅也逐渐增加。由于 $k_2^3 = c_1^2 / c_2^2 = EA / T$, 因此, 索的刚度减小, 增加索的轴力, 索的振幅减小。

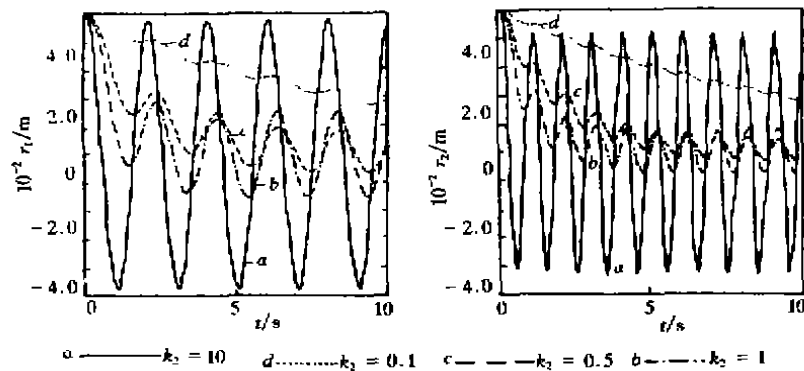


图 4 面内外的响应

5 结论

研究了粘弹性索的非线性动态响应, 得到了小垂度粘弹性索振动的一般控制方程。给出了粘弹性索动力稳定性分析方法, 该方法不仅可用于柔索, 而且对分析粘弹性弦、柱、杆及梁等结构部件的稳定性同样适用。通过数值仿真说明了弹性、粘性参数及波速比等对索的动态响应的影响, 得出如下结论:

- 1) 材料粘性的增加, 或索长的缩短, 面内、面外的振动振幅都减小;
- 2) 索的刚度的减小, 或轴力的增加, 索的面内、面外的振幅都减小;
- 3) 粘弹性索面内振动的频率比面外振动频率高。

参 考 文 献

- [1] WARNICHAI P, FUJINO Y, SUSUMPOW T. A non-linear dynamic model for cables and its application to a cable-structure system[J]. Journal of sound and vibration, 1995, 187(4): 695~712.
- [2] PERKINS N C, MOYE C D. Three-dimensional vibration of travelling elastic cables[J]. Journal of sound and vibration, 1987, 114(2): 325~340.
- [3] TAKAKASHI K, KONISHI Y. Non-linear vibrations of cables in three dimensions[J]. Journal of sound and vibration, 1987, 118(1): 69~97.
- [4] HUANG J S, FUNG R F. Dynamic stability of a moving string undergoing three-dimension vibration[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1995, 37(1): 145~157.
- [5] FUNG R F, HUANG J S, CHEN Y C et al. Nonlinear dynamic analysis of the visco-elastic string with a harmonically varying transport speed[J]. Computers & Struct, 1996, 61(1): 125~132.
- [6] COLEMAN B D, NOLL W. An approximation theorem for functional with application in continuum mechanics [J]. Archive for rational mechanics in structural dynamics, 1980, 23(2): 239~245.

(下接 126 页)