

文章编号:1000-582x(1999)06-0092-06

①7

92-99

微重力下绕汽柱热毛细对流的渐近分析

杨启容, 曾丹芬, 彭 岚
(重庆大学 热能工程学院, 重庆 400044)

TK121

摘 要:用渐近线方法求得了微重力条件下绕汽柱稳态热毛细对流的近似解析解,得到了液体区域的温度场、速度场及界面形状的表达式。通过数值模拟,得到了有关无量纲参数对热毛细对流的影响规律。

关键词:汽柱; 热毛细对流; 渐近分析; 微重力

数学模型

中图分类号:O 192

文献标识码:A

热毛细对流又称为 Marangoni 对流,它是由表面张力梯度引起的一种流动,液体的表面张力是温度的函数,当表面或界面存在温度梯度时,便形成表面张力梯度—热毛细力,这种力曳引表面并通过液体的粘性而诱发主流体运动,形成热毛细对流。80 年代初以前,一些学者对热毛细对流进行了早期研究^[1]。随着空间微重力环境的开辟,近十年来人们对液层和液柱中的热毛细对流及其稳定性作了较为广泛深入的讨论^[2-4]。1992 年 J. Straub^[5]和 1997 年 Li Yang^[6]等人分别对绕汽泡的热毛细对流作了研究。

日本学者 T. Oka^[7]等在 $\alpha = 10^{-3} g$ 的微重力条件下对水和戊烷的池内沸腾进行的实验发现,当汽泡生成后,马上脱离加热面,然后悬浮于距加热面一定距离处,补充到仍未脱离的汽泡底部的液体非常迅速,同时这又促使了汽泡的脱离,高热流时,在最初产生的小汽泡上形成大聚合汽泡,并不断溶入在其下面的液层中产生的小汽泡,从而形成双层汽泡结构,他们将形成这种结构的原因归因于表面张力。Y. Abe 等在微重力条件下针对二元非共沸混合物水-乙醇进行的实验同样证实了这种双层汽泡结构的存在,如图 1 所示,尽管人们对液层,液柱和绕汽泡等的热毛细对流研究成果已经相当丰富,而对现有的文献进行检索时还没有发现绕汽柱热毛细对流的相关资料,因此笔者在如前所述的实验现象中抽象出单个汽柱,建立了一种绕汽柱热毛细对流模型,并对其进行了研究。认识和了解这种热毛细对流现象的基本规律对航天热控制、沸腾相变、临界热负荷的预测和相关技术应用都会提供重要的理论依据。

1 数学模型

考虑如图 2 所示的模型并针对 L/H 比较小的情况进行研究。下端面为固壁加热面,维持恒定温度 T_0 ,上端面为汽-液界面,忽略其变形并维持恒定温度 T_c (T_c 可认为是气体的饱和

• 收稿日期:1998-12-14

作者简介:杨启容(1970-),女,重庆市人,重庆大学博士,现在分配至青岛大学,从事教学科研工作。

温度) ($T_0 > T_c$), 由于文中主要研究热毛细对流的规律, 特假设四周为绝热固壁。中间为汽柱, 汽柱与液体形成的界面为一可变形表面, 所讨论的自由界面即该可变形表面。由于对称, 只考虑二维情形并且只取右半部分进行分析。设液体为不可压缩的牛顿流体。

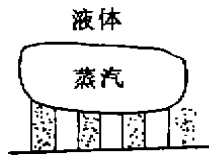


图 1 双层汽泡结构示意图

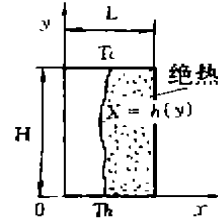


图 2 物理模型

二维流体动控制方程如下:

$$\left. \begin{aligned} u_x + v_y &= 0 \\ uu_x + vv_y &= -p_x/\rho + \gamma(u_{xx} + v_{yy}) \\ uv_x + vu_y &= -p_y/\rho + \gamma(u_{xy} + v_{xy}) \\ uT_x + vT_y &= a(T_{xx} + T_{yy}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, u 和 v 分别为水平和竖直方向的速度分量; p 为压力; T 为液体温度; 下标 (x, y) 代表偏导数。以上方程满足如下边界条件:

$$\left. \begin{aligned} y=0: u=v=0 \quad T=T_h \\ y=H: u_y=v=0 \quad T=T_c \\ x=L: u=v=0 \quad T_x=0 \\ x=h: k\partial T/\partial n = \alpha(T-T_0) \quad (\alpha \text{ 为对流换热系数}) \\ u = v\partial h/\partial y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在汽柱—液体界面处, 应满足正应力和切应力平衡条件:

$$\left. \begin{aligned} t \cdot (\tau \cdot n) &= d\sigma/dTt \cdot \nabla T \\ n \cdot (\tau \cdot n) &= \sigma k \end{aligned} \right\}$$

其中, n 为自由界面外法线方向上的单位向量; $n = (-1, h_y)/N$; t 为自由界面切线方向上的单位向量; $t = (h_y, 1)/N$, $N = (1 + h_y^2)^{0.5}$; τ 为应力张量; k 为界面曲率; $\tau \cdot n$ 为自由界面上的表面力。

因为流体不可压缩且不考虑相变, 所以必须满足不可压缩条件和质量守恒条件

$$\int_0^H [L - h(y)] dy = V; \quad \int_0^L u dx = 0 \quad (3)$$

最后, 为使问题封闭, 还应给出接触条件

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=0} = -\operatorname{tg}\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right); \quad \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=H} = \operatorname{tg}\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

为求得液体温度分布,需先给出无量纲汽体温度分布^[9]:

$$T_v = -y + 1 \quad (5)$$

同时,表面张力与温度的关系满足如下线性方程:

$$\sigma(T) = \sigma_0 - \gamma(T - T_0); \quad (T_0 = (T_h + T_c)/2) \quad (6)$$

2 方程的无量纲化

为使方程和边界条件无量纲化,作以下无量纲变换:

$$x = x'L \quad y = Hy' \quad h = Lh' \quad u = Au' \quad u' = L/H$$

$$v = v' \quad v' = \omega v'' \quad \rho = \omega \rho' \quad H\rho'/L^2 \quad T = (T - T_c)/(T_h - T_c)$$

特征速度通过 Marangoni 效应得出: $v^* = \gamma(T_h - T_c)A/\mu$

定义以下无量纲参数:

$$Re = \frac{v^* H}{\gamma} \quad Ma = \frac{v^* H}{a} \quad Bi = \frac{aL}{k}$$

于是,无量纲化方程组成为(为简化书写,去掉一撇):

$$\left. \begin{aligned} u_x + u_y &= 0 \\ Re \cdot A^3 (uu_x + uv_y) &= -p_x + A^2 u_{xx} + A^4 u_{xy} \\ Re \cdot A (vu_x + uv_y) &= -p_y + v_x + A^2 v_y \\ Ma \cdot A (uT_x + vT_y) &= T_x + A^2 T_y \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

无量纲边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} y=0: \quad u &= v=0 \quad T=1; \\ y=1: \quad u_x &= v=0 \quad T=0; \\ x=1: \quad u &= v=0 \quad T_x=0; \\ x=h: \quad (1 + A^2 h_y^2)^{-1/2} (A^2 h_y T_y - T_x) &= -Bi(T - T_v), \\ u &= vt_y, \\ 2A^2 (u_x - v_y) h_y + (A^2 u_y + v_x) (1 - A^2 h_y^2) &= (T_y + T_x h_y) (1 + A^2 h_y^2)^{1/2}, \\ p + 2(1 + A^2 h_y^2)^{-1} (A^2 u_x - A^4 h_y u_y + A^4 h_y^2 v_y - A^2 v_x h_y) &= \\ C^{-1} A^3 h_y (1 + A^2 h_y^2)^{-3/2} (1 - A^{-1} CT) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这里波数 C 定义为: $C = \mu v^* / \sigma_0$, 它反应了自由界面的变形程度。

方程(3~4)的无量纲形式分别为:

$$\int_0^1 [1 - h(y)] dy = \bar{V} = V/LH, \quad \int_0^1 u dx = 0 \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=0} = -A^{-1} \operatorname{tg}\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right), \quad \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=1} = A^{-1} \operatorname{tg}\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (10)$$

3 渐近解

将任意变量 φ 用幂函数展开

$$\varphi = \varphi_0 + A\varphi_1 + O(A^2), \quad h = r_0 + Ah_1 + O(A^2), \quad r_0 \text{ 为常数} \quad (11a)$$

设接触角趋近于 $\pi/2$, 将接触角写成如下形式:

$$\operatorname{tg}\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) = m_1 A^2 \bar{C}; \quad \operatorname{tg}\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) = m_2 A^2 \bar{C} \quad (11b)$$

设变形很小, 可令: $C = \bar{C}A^{[9]}$, 如果分析在如下条件下进行

$$Re, Ma = o(A^{-1}) \quad (11c)$$

则将(11)代入控制方程及边界条件中, 当 $A \rightarrow 0$ 时, 得零级近似控制方程:

$$u_{0x} + w_{0y} = 0; \quad \bar{h}_{0y} = w_{0x}; \quad -\bar{h}_{0x} = 0; \quad T_{0xx} = 0 \quad (12)$$

零级近似定解条件:

$$\left. \begin{aligned} y=0: & \quad u_0 = w_0 = 0 \quad T_0 = 1; \\ y=1: & \quad u_{0y} = w_0 = 0 \quad T_0 = 0; \\ x=1: & \quad u_0 = w_0 = 0 \quad T_{0x} = 0; \\ x=r_0: & \quad u_0 = 0, w_{0x} = T_{0y} \\ & \quad \bar{h}_0 = \bar{C}^{-1} h_{1xy}, T_{0z} = Bi \cdot (T_0 - T_v) \\ & \quad \int_0^1 h_1(y) dy = 0, \quad \int_0^1 w_0 dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

解方程(12, 13), 得零级近似温度及速度表达式:

$$u_0 = 0; \quad w_0 = p'_0 x^2/2 + c_{11} x + c_{12}; \quad T_0 = T_v$$

其中

$$p'_0 = 3T'_v/2(r_0 - 1); \quad c_{11} = T'_v - p'_0 r_0; \quad c_{12} = -p'_0/2 - c_{11}$$

变形界面形状:

$$h_1 = \bar{C}(p'_0 y^3/6 + H_1 y^2/2 + H_2 y + H_3)$$

式中:

$$H_1 = (m_1 + m_2)A - \frac{1}{2}p'_0; \quad H_2 = -m_1 A; \quad H_3 = -\frac{1}{24}p'_0 - \frac{1}{6}H_1 - \frac{1}{2}H_2$$

由以上分析可知, 零级近似解只代表一种纯导热情况, 未能将对流计入, 为此我们需进一步找出流场的影响, 即求一级近似的温度分布, 再用一级近似的温度分布去修正速度分

布,得一级近似的速度分布,为此,再将(13)代入控制方程及边界条件中,并取 $Re, Ma = O(1)$,当 $A \rightarrow 0$ 时,得一级近似控制方程及边界条件:

$$\left. \begin{aligned} u_x + v_y &= 0 \\ p_x &= 0 \\ -p_y + u_x &= Re(u_0 v_{0x} + v_0 v_{0y}) \\ Ma(u_0 T_{0x} + v_0 T_{0y}) &= T_{1x} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} y=0: & \quad u_1 = v_1 = 0 \quad T_1 = 0; \\ y=1: & \quad u_{1y} = v_1 = 0 \quad T_1 = 0; \\ x=1: & \quad u_1 = v_1 = 0 \quad T_{1x} = 0; \\ x=h: & \quad u_1 = v_0 h_{1y} \quad p_1 = \bar{C}^{-1} h_{2w} \\ & \quad T_{1x} = Bi \cdot T_1 \quad T_{1y} + T_{0x} h_{1y} = u_x \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

解方程组(14),(15),得一级近似的温度及速度表达式:

$$T = T_0 + AT_1 = T_0 + A \cdot Ma \cdot T_0' \cdot \left\{ f_2(x) - f_1(1)x + \frac{1}{Bi} [f_1(h) - f_1(1)] - f_2(h) + f_1(1)h \right\}$$

$$v = v_0 + Av_1 = v_0 + A \left(\frac{1}{2} p_1' x^2 + d_{13}x + d_{14} \right)$$

$$u = u_0 + Au_1 = u_0 + A \left(-\frac{1}{6} p_1'' x^3 - \frac{1}{2} d_{13}' x^2 - d_{14}' x + d_{15} \right)$$

式中

$$f_1(x) = \int v_0 dx, \quad f_2(x) = \int \left(\int v_0 dx \right) dx, \quad p_1' = -\frac{3F_1(y)}{(h-1)^3}, \quad p_1'' = -\frac{3F(y)}{(h-1)^3}$$

$$F_1(y) = \int F(y) dy, \quad F(y) = \left(\frac{1}{2} p_0' h^3 + c_{11}h + c_{12} \right) \left(\frac{1}{2} p_0' y^2 + H_1 y + H_2 \right) \bar{C}$$

$$d_{13} = -p_1' h, \quad d_{13}' = -p_1'' h, \quad d_{14} = -\frac{1}{2} p_1' - d_{13}$$

$$d_{14}' = -\frac{1}{2} p_1'' - d_{13}', \quad d_{15} = \frac{1}{6} p_1'' + \frac{1}{2} d_{13}' + d_{14}'$$

4 计算结果分析与讨论

微重力作用下,促使绕汽柱流动的浮力对流作用十分微弱,特别是当重力为零时,浮力引起的自然对流消失;而当壁面受热时,汽液界面上将产生温度变化,并引发 Marangoni 对流。为了认清热毛细对流对汽柱附近区域内的温度场、速度场的影响,分析不同条件下的流场和温度场尤为重要。通过数值模拟,可以找出无量纲参数 Ma 、 Bi 及 \bar{C} 对热毛细对流的影响规律。

图3给出了零重力 $g=0$,及 $Ma=30, 100$ 的温度分布。从图中可以看出, Ma 数比较小时,温度接近线性分布,随着 Ma 数的增大,高温流体沿界面向温度较低的恒温界面处流动。由于流体不可压缩,这种流动趋势迫使低温流体向温度较高的恒温界面处流动,使得靠近高

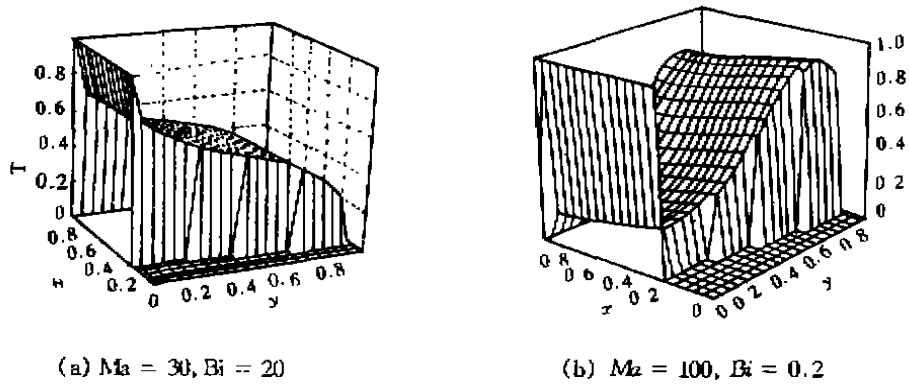


图 3 零重力的温度 T 分布

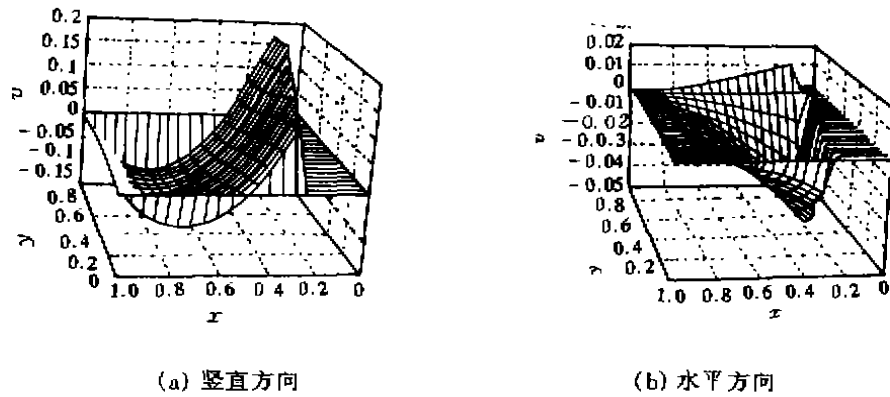


图 4 $Ma = 30$ 时的速度分布

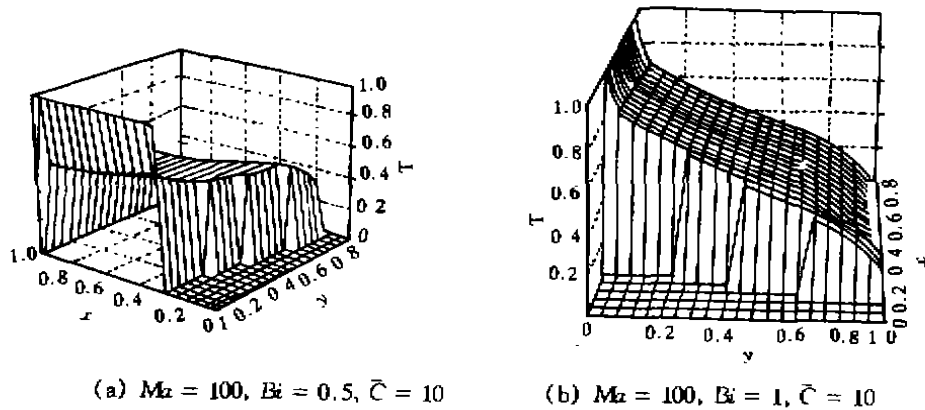
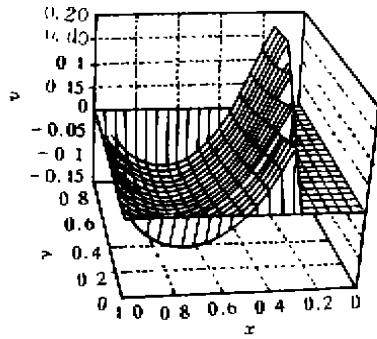


图 5 不同 Bi 数下的温度 T 分布

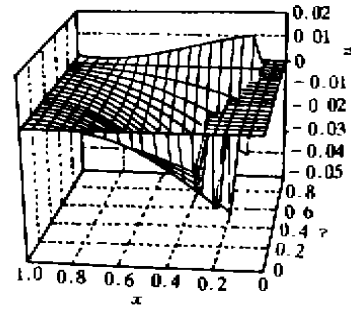
温壁面处流体的温度较原来降低, 而低温壁面处流体的温度提高, Ma 数越大, 这种变化越明显。在图 3 中还给出了汽 - 液界面处的温度分布。

由于上端面温度最低, 下端面温度最高, 表面张力自下而上是逐渐增加的, 因此界面上沿 Y 方向的速度为正, 且自下而上是逐渐增加的。图 4 明显的给出了这种结果。

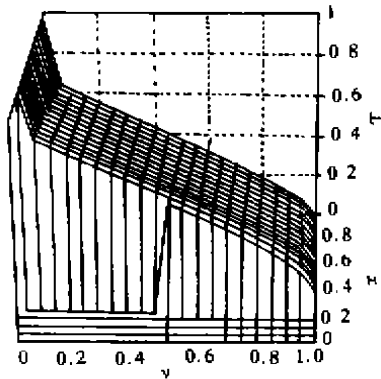
图 5 给出了 $Ma = 100, Bi = 0.5$ 和 1 时的温度分布, 从图中可以看出, 温度分布随着 Bi



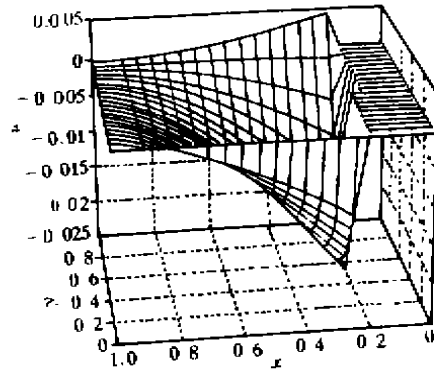
(a) 垂直方向, $\bar{C} = 10$



(b) 水平方向, $\bar{C} = 10$



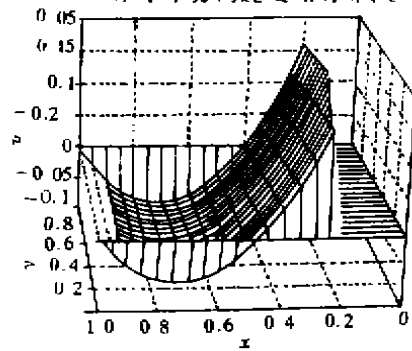
(c) 温度分布, $\bar{C} = 5$



(d) 水平方向速度 u 分布, $\bar{C} = 5$

数的增加逐渐由非线性趋于线性,这是因为 Bi 增加, 换热增强, 热毛细对流对温度的影响减弱。但是在 $Re, Ma = O(1)$ 的限制条件下, Bi 数对流体流动几乎不产生影响, 这从一级近似的温度表达式可以看出。

图 6 给出了 $Ma = 100, \bar{C} = 10$ 和 5 的温度及速度分布。从图中可以看出, 随着 \bar{C} 的增大, 汽-液界面被扭曲的程度增加, 温度分布更加趋于非线性。上端面沿 x 方向的速度为正, 且是随着 \bar{C} 的增加而增大。这说明由于界面的扭曲, 对流体流动形成了一种扰动, 回流趋势与 \bar{C} 较小时相比更加靠近界面, 且回流速度也比 \bar{C} 较小时更大, 使得原本线性化的温度分布成为非线性的温度分布。



(e) 垂直方向速度 v 分布, $\bar{C} = 5$

图 6 不同 \bar{C} 值下的速度和温度 T 分布
($Ma = 100, Bi = 0.5$)

5 结论

本文的主要贡献是: 建立了绕汽柱热毛细对流的数学模型, 求得了 $A \rightarrow 0$ 时的渐近的表达式, 经过数值计算和分析对绕汽柱热毛细对流规律得到以下主要结论: (a) 温度分布的非

线性程度随 Ma 数的增加而增强, 即热毛细对流随着 Ma 数的增加而增强; (b) Bi 数的增加, 温度分布的非线性程度减弱, 这说明增加 Bi 数削弱了热毛细对流对温度分布的影响; (c) $\tilde{\epsilon}$ 的增加, 即变形加大, 使热毛细对流加强。

参 考 文 献

- [1] BLOCK M J. Surface Tension as the Cause of Benard Cells and Surface Deformation in a Liquid Film[J]. Nature, 1956, 178: 650.
- [2] TAKASHIMA M. Surface Tension Driven Instability in A Horizontal Liquid Layer with a Deformable Free Surface [J]. J. Phys. Soc. Jpn, 1981, 50: 2 745.
- [3] PREISSER F, SCHWABE D, SCHARMANN A. Steady and Oscillatory Thermocapillary convection in a Liquid Columns with Free Cylindrical Surface[J]. J. Fluid Mech, 1983, 126: 545.
- [4] MINGWEI LI, DANLING ZENG. The Effect of Liquid Encapsulation on The Marangoni Convection in A Liquid column under Microgravity Condition[J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 1996, 39(17): 3 725~3 732.
- [5] STRAUB J. Numerical Simulation of Marangoni Convection around Gas Bubbles in a Liquid Matrix[A]. Proc. of 8th European Sym on Materials and Fluid Science in Microgravity[C], Brussels, 1992: 820~825.
- [6] LI YANG, ZENG DANLING, YANG QIRONG. Marangoni Convection around a Vapor bubble under Microgravity [A]. Proc. of TAIES 97[C], 1997. 630~634.
- [7] OKA T, ABE Y, MORI Y H. Pool boiling of n-pentane, CFC-113, and water under reduced gravity: Parabolic flight experiments with a transparent heater[J]. Trans. ASME J. Heat Transfer, 1995, 117: 408~417.
- [8] ABE Y, OKA T, MORI Y H. Pool boiling of a non-azeotropic binary mixture under microgravity[J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 1994, 37(16): 2 405~2 413.
- [9] SEN A K, DAVIS S H. Steady thermocapillary flows in two-dimensional slots[J]. J. FLUID MECH, 1982, 121: 163~180.

An Asymptotic Analysis of Marangoni Convection around a Vapor Stem under Microgravity

YANG QI-RONG, ZENG Dan-ling, PENG Lan

(College of Thermal Power Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

ABSTRACT: An asymptotic solution of marangoni convection around a vapor stem under microgravity is obtained by asymptotic way. Expressions of velocity, temperature fields in the liquid region and the interface shape are given. Via numerical simulation the effects of some dimensionless parameters on Marangoni convection are obtained.

KEYWORDS: vapor stem; Marangoni; convection; asymptotic analysis; microgravity

(责任编辑 刘高坤)