

文章编号:1000-582x(2000)01-0045-04

⑫  
45-48

# 随机参数结构的建模技术\*

TU311.3  
0342

张蓓, 殷学纲\*\*

(重庆大学建筑工程学院, 重庆 400044)

**摘要:**在确定性参数建模的基础上,利用摄动有限元方法与概率论方法,提出了根据结构模态实验的随机数据建立结构随机参数模型的理论与方法,旨在更全面而准确地反映结构参数的随机特性。以双层空间刚架为例验证了该理论与方法的正确性。

**关键词:**概率有限元法; 随机参数; 建模

中图分类号: N 945.12

文献标识码: A

结构动力分析 · 刚架

结构动力分析已广泛应用于航空、航天、造船、交通运输、核工程、兵器工业、机械、化工、建筑等工程部门。为了定量准确地进行结构动力分析,首先要建立系统的计算模型。

理论建模是对具体的结构、机械作出必要的简化与假设,根据力学原理建立数学模型。有限元法已被公认为复杂结构动力分析的最有效的方法。然而,在建模中采用的假设与简化和建模人员的经验水平密切相关,对所研究的结构认识深度相关,对边界条件与连接结构的简化和对阻尼性能的简化都给建立的模型带来误差。因此有必要根据实验数据对有限元初始模型进行修正,使其在一定准则下更准确地反映结构的力学特性。

根据实验数据来获得系统准确的分析模型的方法主要有两类:一类是“模态参数识别”(Model Identification),即纯粹的实验建模。随着模态技术的迅速发展,测试仪器功能日益完善,试验精度越来越高,模态试验已成为成熟的可靠的试验,模态参数识别技术已在工程中得到广泛的应用。然而,物理参数识别技术虽然已经提出各种各样的方法,但不太成熟,无法用于工程解决复杂结构问题。例如大型空间站与宇宙飞船,很难单靠地面实验来建模。若对振动系统一无所知,这种系统的识别就成了“黑箱问题”,目前仍难以解决<sup>[3,4]</sup>。另一种方法是“模型修改”(Model Updating),即

在一个初始的数学模型基础上,利用获得的实验数据来改进初始数学模型,也就是实验和理论相结合的方法。笔者提出的方法属于这一类方法。

由于实验模态分析方法的不同,实验环境的差异,测试仪器的不同以及测试技术水平的差异等,都使得对一实际结构的实验模态分析的数据具有一定的分散性,从而可把它看成是一随机变量,并把每一次测试结果看成一个样本中的子样。那么,根据随机的实验数据来对结构初始有限元模型进行修改是得到一个确定性数学模型更合理呢?还是得到一个随机参数模型更合理?我们以前曾利用摄动有限元方法,提出了一种基于确定参数模型的结构动力模型修改方法<sup>[1]</sup>。笔者将提出根据随机的结构实验模态分析数据在结构初始有限元模型基础上建立其随机参数模型的方法,旨在更全面而准确地反映结构参数的不确定性。

## 1 结构随机参数服从正态分布的假设

为了获得可靠的实验数据,往往要对结构采用不同方法进行多次实验,事实证明,实验数据受很多因素的影响,具有随机性。诸如测量仪器本身的不精确,实验手段不相同,人为因素、环境差异以及一些偶然因素等。这些因素是随机的,相互独立的,每个个别因素的影响都不起决定性作用,且这些影响是可叠加的。因此当测得的实验数据量很大时,依概率论中的中心极

\* 收稿日期:1999-06-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(5870364)

作者简介:张蓓(1968-),女,河南郑州市人,重庆大学讲师,在职博士生。从事力学及环保治理领域的研究及教学工作。

\*\* 重庆大学机械传动国家重点实验室研究人员。

限定理, 可对其作出服从正态分布的假设。由此我们可知利用随机的服从正态分布的实验数据改进得到的数学模型的随机参数就应具有相应的正态分布的特性。

在正态分布的假设下, 随机变量的数字特征便可用其均值和方差来表示, 该假设是本文的基本前提。

## 2 结构的随机参数建模

将待修改的系统未知随机参数表示为:

$$P_i = P_0(1 + \epsilon_i) \quad (i = 1 \sim r) \quad (1)$$

其中  $P_0$  是初参数,  $\epsilon_i$  是无限纲随机小变量, 并假设各  $\epsilon_i$  是相互独立的且服从正态分布, 则  $\epsilon_i$  的均值和方差分别为:

$$E[\epsilon_i] = \mu_i \quad \text{Var}[\epsilon_i] = \gamma_i \quad (2)$$

由摄动有限元法可得结构任一阶振动特征值与结构参数之间的二次近似函数关系式:

$$\lambda^{(s)} = \lambda_0^{(s)} + \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)} \epsilon_i + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \lambda_{ik}^{(s)} \epsilon_i \epsilon_k \quad (3)$$

其中:  $s$  为振动特征值的阶次;  $\lambda_0^{(s)}$  是有限元初始模型的计算值;

$$\lambda_i^{(s)} = \frac{\partial \lambda^{(s)}}{\partial \epsilon_i}; \quad \lambda_{ij}^{(s)} = \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \frac{\partial^2 \lambda^{(s)}}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j};$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (4)$$

对(3)式两端同时取数学期望有:

$$E[\lambda^{(s)}] = E[\lambda_0^{(s)}] + E[\sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)} \epsilon_i] +$$

$$E[\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \lambda_{ik}^{(s)} \epsilon_i \epsilon_k] = \lambda_0^{(s)} + \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)} \mu_i +$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \lambda_{ik}^{(s)} \text{cov}[\epsilon_i, \epsilon_k] \quad (5)$$

考虑各小参数  $\epsilon_i$  之间的相互独立性, 则

$$\text{cov}[\epsilon_i, \epsilon_k] = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ \text{Var}[\epsilon_i] = \gamma_i & i = k \end{cases}$$

于是(5)式成为

$$E[\lambda^{(s)}] = \lambda_0^{(s)} + \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)} \mu_i + \sum_{i=1}^r \lambda_{ii}^{(s)} \gamma_i \quad (6)$$

再对(3)式两端同时取方差<sup>[3]</sup>得:

$$\text{Var}[\lambda^{(s)}] = \text{Var}[\lambda_0^{(s)}] + \text{Var}[\sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)} \epsilon_i] +$$

$$\text{Var}[\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \lambda_{ik}^{(s)} \epsilon_i \epsilon_k] = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \lambda_i^{(s)} \lambda_k^{(s)} \text{cov}[\epsilon_i, \epsilon_k] +$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \lambda_i^{(s)} \lambda_k^{(s)} \lambda_l^{(s)}$$

$$[(\epsilon_i - \mu_i)(\epsilon_i - \mu_i)(\epsilon_k - \mu_k)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^r \lambda_i^{(s)} \lambda_k^{(s)} \lambda_l^{(s)} \lambda_m^{(s)} \cdot$$

$$[E[(\epsilon_i - \mu_i)(\epsilon_i - \mu_i)(\epsilon_k - \mu_k)(\epsilon_k - \mu_k)] - \text{cov}[\epsilon_i, \epsilon_i] \text{cov}[\epsilon_k, \epsilon_k]] \quad (7)$$

同样考虑  $\epsilon_i$  之间的相互独立性, (7)式成为

$$\text{Var}[\lambda^{(s)}] = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)2} \text{Var}[\epsilon_i] + \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)} \lambda_{ii}^{(s)} E[(\epsilon_i - \mu_i)^3] +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \lambda_{ii}^{(s)2} (E[(\epsilon_i - \mu_i)^4] - \text{Var}^2[\epsilon_i]) \quad (8)$$

利用正态分布各阶中心矩  $N_n$  与方差  $\text{Var}(x)$  的关系式:

$$N_n = E[(x - \bar{x})^n] =$$

$$\begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ [2^{n/2} \pi^{-1/2} \text{Var}(x)]^n \Gamma(\frac{n+1}{2}) & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (9)$$

显然有

$$E[(\epsilon_i - \mu_i)^3] = 0 \quad (10)$$

$$E[(\epsilon_i - \mu_i)^4] = 2^2 \pi^{-1/2} \text{Var}^2[\epsilon_i] \Gamma(\frac{5}{2}) = 3 \text{Var}^2[\epsilon_i] \quad (11)$$

将(10)式及(11)式代入(8)式得:

$$\text{Var}[\lambda^{(s)}] = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)2} \text{Var}[\epsilon_i] +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \lambda_{ii}^{(s)2} (3 \text{Var}^2[\epsilon_i] - \text{Var}^2[\epsilon_i]) =$$

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)2} \text{Var}[\epsilon_i] + \sum_{i=1}^r \lambda_{ii}^{(s)2} \text{Var}^2[\epsilon_i] =$$

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)2} \gamma_i + \sum_{i=1}^r \lambda_{ii}^{(s)2} \gamma_i^2 \quad (12)$$

综合(6)式及(12)式有

$$\begin{cases} E[\lambda^{(s)}] = \lambda_0^{(s)} + \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)} \mu_i + \sum_{i=1}^r \lambda_{ii}^{(s)} \gamma_i & (6) \\ \text{Var}[\lambda^{(s)}] = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(s)2} \gamma_i + \sum_{i=1}^r \lambda_{ii}^{(s)2} \gamma_i^2 & (12) \end{cases}$$

由此得到了结构任一阶特征值的均值与方差和结构随机参数的均值与方差之间的关系表达式。

根据实验结果应与动力模型分析结构相一致或其它类似原则, 可由(6)式及(12)式确定出  $\epsilon_i$  的均值  $\mu_i$  和方差  $\gamma_i$ 。

通常我们得不到(6)式和(12)式的精确解, 这时可以采用优化过程求得其最小二乘解。

设由测试获得了结构前  $m$  阶特征值的均值与方差为:

$$E[\lambda_s^{(s)}] = \mu_s^{(s)}, \text{Var}[\lambda_s^{(s)}] = \gamma_s^{(s)} \quad (s = 1 \sim m)$$

令

$$\mu_e^{(i)} = \lambda_0^{(i)} + \sum_{j=1}^r \lambda_j^{(i)} \mu_j + \sum_{a=1}^r \lambda_a^{(i)} \gamma_a \quad (13)$$

$$\gamma_e^{(i)} = \sum_{j=1}^r \lambda_j^{(i)2} \gamma_j + \sum_{a=1}^r \lambda_a^{(i)2} \gamma_a^2 \quad (14)$$

依最小二乘法思想, 利用(13)式及(14)式构造目标函数如下:

OBJ:

$$F_1 = \sum_{i=1}^m (\lambda_0^{(i)} + \sum_{j=1}^r \lambda_j^{(i)} \mu_j + \sum_{a=1}^r \lambda_a^{(i)} \gamma_a - \mu_e^{(i)})^2 \quad (15)$$

$$F_2 = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^r \lambda_j^{(i)2} \gamma_j + \sum_{a=1}^r \lambda_a^{(i)2} \gamma_a^2 - \gamma_e^{(i)})^2 \quad (16)$$

于是可将求解非线性方程(13)、(14)转化为下面的非线性优化问题:

$$\text{Min: } F = F_1 + F_2 \quad (17)$$

$$\text{ST: } \mu_j \leq \mu_0 \quad (18)$$

$$0 < \gamma_a \leq \gamma_0 \quad (19)$$

其中  $\mu_0$  和  $\gamma_0$  均为小于 1 的正数, 根据结构的实际情况取值。

利用现成的优化算法, 可得函数  $F$  的最小二乘解  $\mu_j$  和  $\gamma_a$ , 即  $\epsilon_i$  的均值和方差。

已知  $\mu_j$  和  $\gamma_a$ , 那么修改后的结构随机参数  $P_i$  的均值和

方差也就相应得到:

$$E[P_i] = E[P_0(1 + \epsilon_i)] = P_0(1 + \mu_i) \quad (20)$$

$$\text{Var}[P_i] = \text{Var}[P_0(1 + \epsilon_i)] = P_0^2 \gamma_i \quad (21)$$

至此, 便完成了结构的随机参数建模。

### 3 算例分析

#### 3.1 算例

试建立图 1 所示双层空间刚架结构的随机参数模型。框架各杆均为圆截面, 已知数据为:

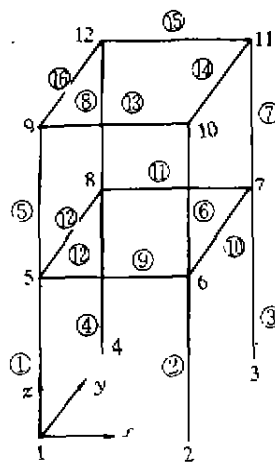


图 1 双层空间刚架示意图

表 1 框架结构随机参数建模结果

$i$	1	2	3	4
$\mu$	-0.104 39	-0.035 04	-0.012 99	0.240 43
$\gamma$	0.179 12	0.197 209	0.194 02	0.208 08
$E[P_i]$	14.329 76 mm	192.992 00 mm	197.402 34 mm	$9.692 72 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
$\text{Var}[P_i]$	2.865 95 mm	38.418 00 mm	38.804 00 mm	$1.625 93 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

表 2 建模前后模型精度比较

频率阶次	实 验 值		初 始 模 型		修 改 后 模 型			
	均值 / Hz	方差 / Hz	均 值		均 值		方 差	
			计算值 / Hz	误差 / %	计算值 / Hz	误差 / %	计算值 / Hz	误差 / %
1	124.3	24.9	141.8	13.804	126.4	1.445	24.8	-0.402
2	155.3	31.0	161.4	3.927	154.1	-0.773	30.2	-2.581
3	155.8	31.2	163.0	4.621	154.6	-0.770	32.1	2.885
4	157.9	31.6	168.8	6.903	159.8	1.203	31.8	0.633
5	198.5	39.7	223.3	12.494	206.4	3.980	41.4	4.282
6	261.3	52.3	283.9	8.649	264.3	1.148	51.1	-2.294
7	275.1	55.0	296.9	7.924	272.2	-1.054	54.8	-0.364
8	281.0	56.2	306.3	9.004	290.7	3.452	57.9	3.025
9	300.0	60.0	318.8	6.000	302.1	0.700	59.5	-0.833
10	407.5	81.5	434.4	6.601	424.4	4.147	84.7	3.926

各杆长度;  $L = 200 \text{ mm}$

截面直径;  $d = 16 \text{ mm}$

弹性模量;  $E = 2.092 \times 10^{11} \text{ Pa}$

剪切弹模;  $G = 8.046 \times 10^{10} \text{ Pa}$

质量密度;  $\rho = 7.81 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

### 3.2 有限元初始模型解

将图1所示刚架划分为16个单元,取每一杆为一个有限单元,由此得到一个72个自由度的有限元模型。该刚架的单元编号 $j$ 、结点编号 $z$ 以及整体坐标系的规定如图1所示,算得其前10阶固有频率如表2所示。

### 3.3 固有频率实验测试

采用比较成熟而最普遍使用的频响函数法进行刚架模型的实验分析。用橡皮条将框架竖直悬挂,用锤击法激振,测出测点 $y$ 向和 $z$ 向的响应,共进行了8次测试,经HI3582A结构动态分析仪分析后得表2所示该模型前10阶固有频率的均值和方差。

### 3.4 修改参数的选择

该框架有限元初始模型参数的主要不准确来自(1)各单元的长度和直径。各单元的材料均来自同一根轧钢,属于同一批产品,因而可认为各单元的材料特性及直径参数具有相同的均值和方差。选择各单元的直径 $d_i$ 作为一个修改参数。(2)框架①、②单元的长度与有限元初始模型的长度 $L_0$ 误差较大,可选为另外两个修改参数。(3)我们主观上认为各单元之间是完好地焊接在一起的,而实际上由于制造工艺的原因,焊接处很难保证完全紧密和均匀光滑,由于结构的对称性,可认为它们对单元刚度和质量的影响是相同的。于是选择下面四个修改参数:

$P_1$  为各单元的直径,  $P_2$ 、 $P_3$  为单元①、②的长度,

$P_4$  为各单元的质量密度,且

$$P_i = P_0(1 + \epsilon_i), E[\epsilon_i] = \mu_i,$$

$$\text{Var}[\epsilon_i] = \gamma_i \quad (i = 1 \sim 4)$$

其中;  $P_{10} = 16 \text{ mm}$ ,  $P_{20} = P_{30} = 200 \text{ mm}$ ,  $P_{40} = 7.814 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。

### 3.5 随机参数建模

对框架结构实施(3)~(21)式所示建模过程,得表1所示建模结果。

### 3.6 建模前后模型精度比较

随机参数建模前后框架模型的分析结构及其与实验结果的相对误差如表2所示。

从表1可看出,由修改后模型计算出的前10阶固有频率的均值与实测频率均值的误差从修改前的3.927%~13.804%减少到0.700%~4.147%,计算方差也很好地逼近了实验方差。可见建模结果令人满意。

本文的理论与方法显然也适用于更广泛的结构形式的随机参数建模。相对于确定性参数模型,该模型具有更准确、更全面的特性。在此模型基础上,我们可对其开展结构静动力概率分析,可靠性分析,概率故障诊断等多种研究。

### 参 考 文 献

- [1] 殷学刚,雷跃明. 摄动有限元方法在结构动力模型修改中的应用[J]. 应用力学学报, 1992, 2: 38~46.
- [2] 中桐滋,久田俊明. 概率有限要素法[M]. 培风馆, 1985.
- [3] 邱吉玉,杨永新,王建民. 用试验识别模态修改数学模型方法与复杂结构建模技术[J]. 振动与冲击, 1994, 11(3): 8~14.
- [4] BERMAN A, FLANNELLY W G. Theory of Incomplete Models of Dynamic Structure[J]. AIAAJ, 1971, 9: 1481~1487.

## A Method of Modeling with Structural Stochastic Parameters

ZHANG Bei, YIN Xue-gang

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**ABSTRACT:** In order to reflect the stochastic characteristic of a structure more completely and accurately, this paper presents a theory and method of modeling with structural stochastic parameters using probabilistic finite element method and perturbant finite element method, on the basis of modeling with deterministic parameters. It is applied to double-decker space frame, good results are gained.

**KEYWORDS:** P-FEM; stochastic parameters; modeling

(责任编辑 钟学恒)