2000 年 1 月　　重庆大学学报　（自然科学版）　　Vol.23
第 23 卷第 1 期　　Journal of Chongqing University(Natural Science Edition)　　Jan.2000

文章编号：1000－582x(2000)01-0114-03

29

关于次正规算子的相似对偶*

114-116　　O177.1

颜　军
（重庆大学 理学院，重庆　400044）

摘　要：讨论了次正规算子的相似对偶问题，证明了纯次正规算子相似对偶的对称性，给出了相似的纯次正规算子有相似极小正规延拓的充要条件，还论述了次正规加权位移的情况。

关键词：次正规算子／相似对偶；加权位移
中图分类号：O 177.1　　**文献标识码**：A

希尔伯特空间

设 H 是一个 Hilbert 空间，S 是 H 上的一个次正规算子，即它有极小正规延拓 N，则 N 有形式：$N=\begin{pmatrix} S & X \\ 0 & T^* \end{pmatrix}$，其中 N、T 都唯一到酉等价。从这里看到 S、T、N 三者之间存在着紧密的内在联系，笔者对这种联系的一个方面进行的研究，得到了一些结果。关于这方面的其它工作可参看文献[1～4]。

定义　设 S 是 H 上的纯次正规算子、N 定义于 Hilbert 空间 K 上是 S 的极小正规延拓[5]，$K=H\oplus H^{\perp}$，则 $N=\begin{pmatrix} S & X \\ 0 & T^* \end{pmatrix}$，称 T 为 S 的对偶。如果 T 与 S 相似(酉等价)，则称 S 具有相似对偶(自对偶)。

定理 1　如果 S 具有相似对偶 T，则 T 具有相似对偶 S，且 $\sigma(S)$ 关于实轴对称。

证明　由于 S 是纯的，所以 T 的极小正规延拓为 N^*，故显然 T 具有相似对偶 S.

由于 $\sigma(S)=\sigma(T)$，故只需证明 $\sigma(S)=\{\bar{\lambda}:\lambda\in\sigma(T)\}$.

如果 $\lambda\notin\sigma(S)$，则 $\lambda\notin\sigma(N)$，于是 $(N-\lambda)^{-1}|_H=(S-\lambda)^{-1}$ 且 $(N-\lambda)^{-1}$ 有形式 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$，故知 $C=(T^*-\lambda)^{-1}$，所以 $\lambda\notin\sigma(T^*)$，即 $\sigma(S)\supset\{\bar{\lambda}:\lambda\in\sigma(T)\}$.

由 S 与 T 的对称性知结论成立。　　证毕

定理 2　设 S 是 H 上的纯次正规算子，N 定义于 K 上是 S 的极小正规延拓，如果存在 W 定义于 K 上满足 $WN=N^*W$，$W|_H=U:H\to H^{\perp}$ 是可逆的，则 S 具有相似对偶。

证明　由条件知在 $K=H\oplus H^{\perp}$ 上，$W=\begin{pmatrix} 0 & V \\ U & Y \end{pmatrix}$，直接计算 $WN=N^*W$，知结论成立。　证毕

定理 3　对纯次正规算子 S_i，$i=1,2$，如果 S_1 相似于 S_2，即存在着可逆有界算子 $U:H_2\to H_1$ 使 $US_2=S_1U$，且若 N_i 是 S_i 的极小正规延拓，$i=1,2$，则存在一个可逆算子 $W:K_2\to K_1$ 满足：$W|_{H_2}=U$ 且 $WN_2=N_1W$ 的充要条件是存在常数 c、$d>0$，使对 $\forall\{f_i\}_{i=0}^{n}\subset H_2$，有下式成立：

$$d\sum_{i,j=0}^{n}\langle S_2^{j}f_i, S_2^{i}f_j\rangle\leqslant\sum_{i,j=0}^{n}\langle S_1^{j}Uf_i, S_1^{i}Uf_j\rangle$$

$$\leqslant C\sum_{i,j=0}^{n}\langle S_2^{j}f_i, S_2^{i}f_j\rangle$$

证明　如果 W 存在，$\{f_i\}_{i=0}^{n}\subset H_2$，则

$$\sum_{i,j=0}^{n}\langle S_1^{j}Uf_i, S_1^{i}Uf_j\rangle=\sum_{i,j=0}^{n}\langle N_1^{j}Wf_i, N_1^{i}Wf_j\rangle=$$

$$\sum_{i,j=0}^{n}\langle WN_2^{*j}f_i, WN_2^{*i}f_j\rangle\leqslant$$

$$\|W\|^2\sum_{i,j=0}^{n}\langle N_2^{*j}f_i, N_2^{*i}f_j\rangle=\quad(C=\|W\|^2)$$

$$C\sum_{i,j=0}^{n}\langle S_2^{j}f_i, S_2^{i}f_j\rangle$$

又

$$\sum_{i,j=0}^{n}\langle S_2^{j}f_i, S_2^{i}f_j\rangle=$$

---

* **收稿日期**：1999-02-04

作者简介：颜军(1961-)，男，重庆市人，重庆大学理学院应用数学系讲师，硕士，主要从事数学教学和研究工作。

$$\sum_{i,j=0}^{n}\langle S_2^{*i}U^{-1}g_i, S_2^{*j}U^{-1}g_j\rangle = \quad (g_i = Uf_i)$$

$$\sum_{i,j=0}^{n}\langle N_2^{*i}W^{-1}g_i, N_2^{*j}W^{-1}g_j\rangle =$$

$$\sum_{i,j=0}^{n}\langle W^{-1}N_1^{*i}g_i, W^{-1}N_1^{*j}g_j\rangle \leqslant$$

$$\|W^{-1}\|^2\sum_{i,j=0}^{n}\langle N_1^{*i}g_i, N_1^{*j}g_j\rangle =$$

$$d^{-1}\sum_{i,j=0}^{n}\langle S_1^{*i}Uf_i, S_1^{*j}Uf_j\rangle$$

反之，如果条件满足，定义 W 为：

$$W: K_2 \to K_1;$$

$$\sum_{k=0}^{n}N_2^{*k}f_k \to \sum_{k=0}^{n}N_1^{*k}Uf_k$$

则 $W|_{H_2} = U$, $WN_2 = N_1W$，且 W 是一个满映射。

由于

$$\|W(\sum_{k=0}^{n}N_2^{*k}f_k)\|^2 =$$

$$\|\sum_{k=0}^{n}N_1^{*k}Uf_k\|^2 =$$

$$\sum_{i,j=0}^{n}\langle N_1^{*i}Uf_i, N_1^{*j}Uf_j\rangle =$$

$$\sum_{i,j=0}^{n}\langle S_1^{*i}Uf_i, S_1^{*j}Uf_j\rangle \leqslant$$

$$C\|\sum_{k=0}^{n}N_2^{*k}f_k\|^2$$

所以 $\|W\| \leqslant \sqrt{C}$，W 是有界线性算子。

同理可证：$d\|\sum_{k=0}^{n}N_2^{*k}f_k\|^2 \leqslant \|(\sum_{k=0}^{n}N_2^{*k}f_k\|^2$，所以 $\ker W = \{0\}$，故 W 是可逆算子。　　证毕

推论4　设 S 是纯次正规算子，有相似对偶 T，$U^{-1}TU = S$，则存在可逆算子 W 满足：$W|_H = U$ 且 $W^{-1}N^*W = N$ 的充要条件是存在常数 c、$d>0$，使对 $\forall\{f_i\}_{i=0}^{n}\subset H$，有：

$$d\sum_{i,j=0}^{n}\langle S^{*i}f_i, S^{*j}f_j\rangle \leqslant \sum_{i,j=0}^{n}\langle US^{*i}f_i, US^{*j}f_j\rangle \leqslant C\sum_{i,j=0}^{n}\langle S^{*i}f_i, S^{*j}f_j\rangle$$

证明　由于 S 是纯的，N^* 是 T 的极小正规延拓，故由定理3知真。　　证毕

定理5　设 N 是 $L^2(\mu)$ 上乘 Z 的算子，μ 是一个 Borel 测度且 $\mu(\Delta) = \mu(\bar{\Delta})$（$\forall\Delta$-Borel集），$V$ 是 $L^2(\mu)$ 上算子定义为：$(Vf)(z) = f(\bar{z})$，$f\in L^2(\mu)$，如果有 W 定义于 $L^2(\mu)$ 上满足 $WNW^{-1} = N^*$，则 $\exists w\in L^\infty(\mu)$，使得 $W = VM_w$。

证明　容易证明 V 是两算子且 $V^2 = 1$，$VNV = N^*$，所以

$$(VW)N(VW)^{-1} =$$

$$V(WNW^{-1})V^{-1} = VN^*V = N$$

即 $VW\in\{N\}'$，所以 $\exists W\in L^\infty(\mu)$，使 $VW = M_w$，即 $W = VM_w$。

下面讨论次正规带权位移算子具有相似对偶的充要条件。

不难知道，对权序列为 $\{\alpha_n\}_0^\infty$ 的带权位移 S，S 是次正规的充要条件是唯一 $\exists[0,1]$ 上的概率测度 v，$1\in\operatorname{supp}v$，使 $(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})^2 = \int_0^1 r^{2n}dv(r)$，$n\geqslant 1$，且如果令 $d\mu(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}d\theta dv(r)$，则 $S\cong S_\mu$。

对双向位移来说，同样有上述的 v，只是还需满足：

$$(\alpha_{-1},\cdots,\alpha_{-n})^2 = \int_0^1 r^{-2n}dv(r)$$

定理6　设 S 是纯次规单向加权位移，$\|S\| = 1$，则 S 具有相似对偶的充要条件是 $v = \delta_1$ 或 $v = \alpha\delta_1 + \beta\delta_0$。这里 α、$\beta>0$，$\alpha+\beta = 1$，δ_1、δ_0 分别表示 $\{z=0\}$ 和 $\{z=1\}$ 上的单位测度。

证明　设 $S\cong S_\mu = M_z|_{P^2(\mu)} = N|_{P^2(\mu)}$，因为 S 循环，对 $N = \begin{pmatrix} S & X \\ 0 & T^* \end{pmatrix}$，又知 $XX^* = [S^*, S]$ 是迹类算子，所以 X 紧。故若 S 相似于 T，则有 $\sigma_e(N) = \sigma_e(S)\cup\sigma_e(T^*) = \partial D$（单位圆周），但 $\sigma(N)\setminus\sigma_e(N)$ 至多可数，而 $\sigma(S)$ 和 $\sigma(N)$ 均关于圆周对称，所以 $\sigma(N) = \partial D$ 或 $\sigma(N) = \partial D\cup\{0\}$，即 $v = \delta_1$ 或 $v = \alpha\delta_1 + \beta\delta_0$。

反之，如果 $v = \delta_1$，则明显 S 不带权[6]，此时 $S\cong T$。

如果 $v = \alpha\delta_1 + \beta\delta_0$，$\alpha$、$\beta>0$，$\alpha+\beta = 1$，则 $\mu = \beta\delta_0 + \alpha\lambda_1$，这里 λ 是 ∂D 上单位 Lebeqne 测度。

令 $e_0 = 1$，x_1 和 x_0 分别是 ∂D 和 $\{0\}$ 点的特征函数，对 $n\neq 0$，$e_n = \alpha^{-\frac{1}{2}}z^nx_1$，$\tilde{e}_0 = (\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}}(-\alpha x_0 + \beta x_1)$：

则 $\{\tilde{e}_0\}\cup\{e_n: n\in Z\}$ 是 $L^2(\mu)$ 的正交基，$\{e_n: n\geqslant 0\}$ 是 $H^2(\mu)$ 的正交基，$\{\tilde{e}_0\}\cup\{e_n: n\leqslant -1\}$ 是 $H^2(\mu)^\perp$ 的正交基。直接计算得：

$$Ne_n = e_{n+1}\,(n\geqslant 1, n\leqslant -2)\quad Ne_{-1} = \beta^{\frac{1}{2}}\tilde{e}_0 + \alpha^{\frac{1}{2}}e_0$$

$$Ne_0 = \alpha^{\frac{1}{2}}e_1,\qquad N\tilde{e}_0 = \beta^{\frac{1}{2}}e_1$$

$$N^*e_n = e_{n-1}\,(n\geqslant 2, n\leqslant -1),\ N^*e_1 = \beta^{\frac{1}{2}}\tilde{e}_0 + \alpha^{\frac{1}{2}}e_0$$

$$Ne_0^* = \alpha^{\frac{1}{2}}e_{-1},\ N^*\tilde{e}_0 = \beta^{\frac{1}{2}}e_{-1}$$

故 S 的权序列为$\{\alpha^{\frac{1}{2}},1,1,\cdots\}$, T 的权序列为$\{\beta^{\frac{1}{2}},1,1,\cdots\}$定义算子 $U,H\to H^{\perp}$: $\begin{cases} Ue_n = e_{-n} \\ Ue_0 = \frac{\alpha}{\beta}e_0 \end{cases}$ $(n\geq 1)$, 则 U 是可逆算子, $US = TU$, 即 S 相似于 T。 证毕

定理 7 设 S 是可逆不可约的次正规双向加权位移, $\|S\| = 1$, 则 S 具有相似对偶, 当且仅当 $\exists r\in(0,1)$, 使 $\alpha\delta_1 + \beta\delta_r = \upsilon$, $\alpha+\beta = 1$, $\alpha、\beta > 0$.

证明 如定理 6, 如果 S 相似于 T, 则 $\sigma(N) = \sigma_r(N) = \sigma_e(S)$, 故 $\exists r\in(0,1)$, 使 $\upsilon = \alpha\delta_1 + \beta\delta_r$.

反之, 如果 $\upsilon = \alpha\delta_1 + \beta\delta_r$, 则 $\mu = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_r$, 其中 λ_1、λ_r 分别是$\{|z| = 1\}$, $\{|z| = r\}$ 上的单位 Lebegue 测度。

对 $n\in Z$, 令 $M_n = V\{Z^n |z|^K : K\in Z\}$, 则 M_n 是 $L^2(\mu)$ 中的二维子空间, $M_n = \{aZ^n + bZ^n|z|^2 : a, b, c\}$, 且当 $n\neq m$ 时, $M_n\perp M_m$.

令 $e_n = (\beta r^{2n}+\alpha)^{-\frac{1}{2}}z^n$

$$f_n = r^{-n}(1-r^2)^{-1}(\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}}(\beta r^{2n}+\alpha)^{-\frac{1}{2}}\cdot \{z^n|z|^2 - (\beta r^{2n+2}+\alpha)(\beta r^{2n}+\alpha)^{-1}z\}$$

则 $\|e_n\| = \|f_n\| = 1$, $f_n\perp e_n$, $V\{f_n, e_n\} = M_n$

而且

$$NM_n = M_{n+1},\ N^*M_n = M_{n-1}$$

$$V\{e_n\} = H = R^2(\mu),\ V\{f_n\} = R^2(\mu)^{\perp} = H^{\perp}$$

如果再令: $h_n = f_{-n}$

$$\begin{cases} \eta_n = [(\beta r^{2n+2}+\alpha)/\beta r^{2n}+\alpha)]^{1/2} \\ \upsilon_n = \frac{1}{r}[(\beta r^{-(2n+2)}+\alpha)/\beta r^{-2n}+\alpha)]^{1/2} \end{cases}$$

则计算得

$$Ne_n = \eta_n e_{n-1},\ N^*f_n = \gamma_{-n}f_{n-1},\ N^*h_n = \upsilon_n h_{n+1}$$

故 $Se_n = \eta_n e_{n+1}$, $Th_n = \upsilon_n h_{n+1}$

令

$$\begin{cases} \theta_n = \upsilon_n/\eta_n = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\alpha\beta(r^{2n+2}+r^{-2n})+\alpha^2r^2+\beta^2}{\alpha\beta(r^{2n-2}+r^{-2n})+\alpha^2+\beta^2r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \delta_n = \alpha\beta(r^{2n+2}+r^{-2n}) \end{cases}$$

则 $$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta_n}{1+\delta_n}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\theta_n\leqslant\frac{1}{r^2}\left(\frac{1+\delta_n}{\delta_n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

故 $\prod_{n=0}^{\infty}\theta_n$ 与 $\prod_{n=-1}^{-\infty}\theta_n^{-1}$ 均收敛。

定义算子

$$U: R^2(\mu)\to R^2(\mu)^{\perp}: \begin{cases} e_n\to\prod_{k=0}^{n}\frac{\upsilon_k}{\eta_k}h_n & n\geq 0 \\ e_{-n}\to\prod_{k=1}^{n}\frac{\eta_{-k}}{\gamma_{-k}}h_{-n} & n\geq 1 \end{cases}$$

则 U 是有界可逆算子, $USU^{-1} = T$. 证毕

参 考 文 献

[1] CONWAY J. The deal of a Subnormal operator[J]. J. Operator Theory, 1981, (5): 195~211.

[2] BROWN S. Some Invarint Subspaces for subnormal operators[J]. Integral Equs op Theory, 1978, (1): 310~333.

[3] BROWN J. Subnormal operators[J]. Duke Math Soc, 1955, (22): 75~94.

[4] SUN SHUN-HUA. On hyponormal weighted shipt[J]. Chin Ann of Math, 1978, (1): 101~108.

[5] OLIN O. Functional relationships between a subnormal operator and its miniamal normal extension[J]. Pac. J. Math, 1976, (63): 221~229.

[6] SHIELDS A. Weighted shift operators and analytic function theory [J]. Math Surveys Amer Math Soc, 1974, (13): 49~128.

The Similar-dual of a Subnormal Operator

YAN Jun

(College of Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

ABSTRACT: The problems of similar-dual of subuormal operators are discussed. The symmetry of similar-dual of the pure subnormal operator are proved and necessary and sufficient conditions that the similar pure subnormal operatorha similar minimal normal extention are given and meanwhile the subnormal weighted shift of operators also discussed.

KEYWORDS: subnormal operator; similar-dual; wighted shift

(责任编辑 刘尚坤)