

文章编号: 1000-582x(2000)02-0064-04

# 具有模糊弹性连接的杆系结构有限元方法

吕恩琳<sup>1</sup>, 钟佑明<sup>2</sup>, 向世明<sup>3</sup>

TU311

(1. 重庆大学 建筑工程学院, 重庆 400044;

2. 重庆大学 机械工程学院, 重庆 400044; 3. 华中理工大学 力学系, 武汉 430074)

**摘要:** 杆系结构各单元在节点处的连接状态往往是介于刚接和铰接之间的某种弹性连接状态, 作者推导了具有转动弹性连接的杆单元刚度矩阵和荷载转移矩阵, 其中考虑了横向剪切效应。通常的两端铰接、两端刚接或一端铰接、一端刚接的杆元刚度矩阵只是作者所推导的刚度阵的一些特例。在指出弹性连接杆单元节点的弹性系数是模糊量后, 给出了这种杆单元的模糊刚度阵, 并给出了结构模糊有限元平衡方程的一种解法。得到的模糊解不仅包含了普通有限元法的结果, 而且提供了有实际意义的附加信息。

**关键词:** 杆系结构; 弹性连接; 模糊有限元法

中图分类号: O 159

文献标识码: A

工程结构

在通常的杆系结构中, 单元的节点被简化为刚接点或铰接点, 但是在实际的工程结构中, 没有哪一种节点是没有摩擦力的理想铰接点, 而严格的刚性固节点也很少。人们通常遇到的是弹性连接的情况, 即节点本身可能具有相当大的柔度, 如焊接节点就是一种典型的弹性连接。在结构分析中如能考虑这些节点柔度的影响, 将是十分有益的。作者以平面框架为例, 建立具有转动弹性连接<sup>[1]</sup>的杆元刚度矩阵和荷载转移矩阵, 考虑了横向剪切效应。此外, 在很多结构中, 单元两端的转动连接弹性系数是难以精确描述的, 模糊集合理论则能较好地处理这种情况, 为此作者也给出了具有模糊弹性连接的杆单元刚度阵和荷载转移阵, 并讨论了含有这种模糊单元刚度阵的有限元平衡方程的解法。

## 1 弹性连接杆单元刚度矩阵

典型的转动弹性连接杆单元如图 1 所示。图中  $S_1$  和  $S_2$  为杆两端的转动连接弹性系数, 其定义为弹性连接处每单位相对转角的力矩。  $EI$  为  $xy$  平面内的抗弯刚度,  $A$  为横截面面积,  $G$  为材料的剪切弹性模量,  $A_s$

为梁在  $y$  方向的受剪有效横截面面积。为推导方便, 引入如下记号, 这些记号在全文内的意义均相同。

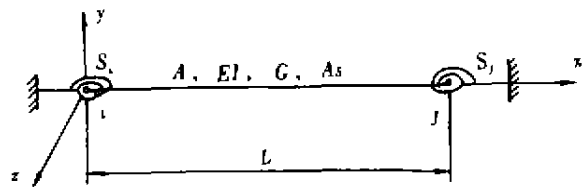


图 1 具有转动弹性连接的杆单元

$$\varphi = \frac{12EI}{GA_s L^2}, \quad e_1 = \frac{EI}{S_1 L}, \quad e_2 = \frac{EI}{S_2 L}$$

$$e_{q1} = e_1 + e_2 + 1, \tag{1}$$

$$e_n = ne_1 + 1, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$e_n = ne_2 + 1, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$i = 4e_{i3}e_j + e_{i4} + e_{j1}\varphi$$

用刚度法可以推出图 1 所示杆单元在局部坐标系

收稿日期: 1999-08-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19372076)

作者简介: 吕恩琳(1947-), 男, 江苏如东县人, 重庆大学机械传动国家重点实验室研究人员, 教授, 主要从事工程结构分析和优化设计方向的研究。

下的刚度矩阵为：

$$[K_e] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ & \frac{12I_{y1}}{L^3} & \frac{6I_{y2}}{L^2} & 0 & \frac{-12I_{y2}}{L^3} & \frac{6I_{y2}}{L^2} \\ & & \frac{I(4e_{y1} + \varphi)}{L} & 0 & \frac{-6I_{y2}}{L^2} & \frac{I(2-\varphi)}{L} \\ & & & A & 0 & 0 \\ & \text{对称} & & & \frac{12I_{y2}}{L^3} & \frac{-6I_{y2}}{L^2} \\ & & & & & \frac{I(4e_{y3} + \varphi)}{L} \end{bmatrix} \quad (2)$$

如果令  $S_i \rightarrow \infty, S_j \rightarrow \infty$ , 即  $e_i = e_j = 0$ , 则式(2)就是一般平面刚架的梁单元刚度矩阵。

如果令  $S_i \rightarrow \infty, S_j = 0$ , 此时  $e_i = 0, e_j \rightarrow \infty$ , 则由式(2)可推得右端固定左端铰支的梁单元刚度矩。若令  $S_i = 0, S_j = 0$ , 则式(2)变为一般的桁架单元。

### 2 荷载移置矩阵

在对杆系结构分析时, 节间荷载必须转化到节点上去, 转化后的荷载称为等效节点荷载。设节间作用荷载  $F_m$ , 等效节点荷载为  $F_i$ , 则  $F_i$  可表达为:

$$F_i = TF_m \quad (3)$$

式中  $T$  称为节间荷载转移矩阵。

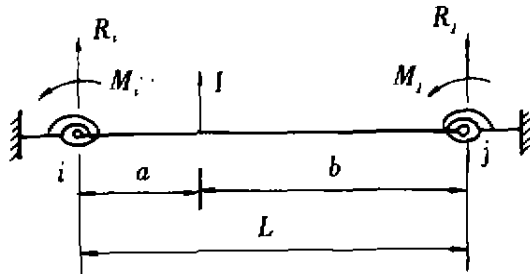


图 2 有一个集中荷载的弹性连接杆单元  
当节间作用一集中荷载, 如图 2 所示。此时

$$F_i = (R_i, M_i, R_j, M_j)^T = T_1$$

而

$$T_1 = \frac{1}{L^3(4e_{y3}e_j + e_{y4})} \begin{bmatrix} b[3ae_{y2}(2ae_j + be_{y4}) + b^2(4e_{y3}e_j + e_{y4})] \\ abL(2ae_j + be_{y4}) \\ a[3be_{y2}(2ae_j + be_{y4}) - (a^2 + 3bL)(4e_{y3}e_j + e_{y4})] \\ -abL[(a + 2b)(4e_{y3}e_j + e_{y4}) - 2e_{y3}(2ae_j + b4e_{y4})] \end{bmatrix} \quad (4)$$

当节间作用均布荷载, 可推得荷载转移矩阵  $T_2$  为:

$$T_2 = \frac{1}{12(4e_{y3}e_j + e_{y4})} \begin{bmatrix} 6(12e_{y1}e_j + e_{y3} + 5e_j) \\ Le_{y6} \\ 6(12e_{y1}e_j + e_{y3} + 5e_j) \\ -Le_{y6} \end{bmatrix} \quad (5)$$

当在杆的全长上作用三角形分布荷载, 并设在左端  $i$  点(参见图 1) 荷载强度最小(即为零), 在右端  $j$  点荷载强度为最大。此时荷载转移矩阵为:

$$T_3 = \frac{1}{60(4e_{y3}e_j + e_{y4})} \begin{bmatrix} 3(8e_{y1}e_j + 3e_{y6}) \\ 2Le_{y7} \\ 3(80e_{y1}e_j + 32e_{y1} + 22e_{y1} + 7) \\ -L(16e_{y1} + 3) \end{bmatrix} \quad (6)$$

在式(4)~(6)中带有下标的变量, 取值方法见式(1)。当节间作用有几种荷载模式时, 可由叠加原理求出等效节点荷载。

### 3 模糊杆单元

在杆系结构分析中, 如使用前述弹性连接杆单元, 单元节点的弹性系数  $S_i$  和  $S_j$  对计算结果有很大影响。事实上人们很难给出  $S_i$  和  $S_j$  的精确值, 现实的方法也许是指出  $S_i$  和  $S_j$  在某值附近。这意味着  $S_i$  和  $S_j$  属于典型的模糊量。我们将单元两端的连接弹性系数是模糊量的单元称为模糊杆单元。

模糊杆元两端的转动弹性系数分别记为  $\underline{S}_i$  和  $\underline{S}_j$ , 用 L-R 型模糊数<sup>[2]</sup> 表示为

$$\underline{S}_i = (s_i, s_w, s_{\theta})_{LR}$$

$$\underline{S}_j = (s_j, s_w, s_{\theta})_{LR}$$

式中  $L$  和  $R$  是  $\underline{S}_i$  的左、右基准函数,  $s_i$  是  $\underline{S}_i$  的主值,  $s_w$  和  $s_{\theta}$  分别是  $\underline{S}_i$  的左、右展形;  $s_j, s_w$  和  $s_{\theta}$  的意义可以类推。显然, 当  $S_i = 0$  时,  $i$  节点为铰接点; 当  $S_i \rightarrow \infty$  时,  $i$  节点为刚接点。

文[2]指出数学结构模糊化的一种途径是在已知的理论框架中, 用模糊集(或它们的  $\alpha$ -截集族)去替代普通集。因此, 模糊杆单元的刚度阵  $[K_e]$  在形式上与式(2)是相同的。只需在式(2)中用  $\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_{y1}, \underline{e}_{y2}, \underline{e}_{y3}$  和  $\underline{t}$  分别代替  $e_i, e_j, e_{y1}, e_{y2}$  和  $t$  即可, 这里  $\underline{e}_i$  等模糊量的定义与式(1)相同, 只是需要用  $\underline{S}_i$  和  $\underline{S}_j$  分别代替  $S_i$  和  $S_j$ 。

### 4 模糊有限元平衡方程的解法

当杆系结构存在模糊弹性连接杆单元时, 结构分析的平衡方程为:

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (7)$$

一般情况下,  $[K], \{U\}$  和  $\{P\}$  中的元素均是  $S_i (i = 1, 2, \dots, N_j)$  的函数, 这里  $S_i$  为第  $i$  节点的模糊转动弹性系数,  $N_j$  是结构中具有模糊转动弹性连接的节点总数。

对方程(7)作  $\lambda (0 < \lambda \leq 1)$  水平截集, 得区间系数线性方程组:

$$[K, \bar{K}]_1 \{U, \bar{U}\}_1 = \{P, \bar{P}\}_1 \quad (8)$$

方程(8)的解  $\{U, \bar{U}\}_1 = \{[U_1, \bar{U}_1], \dots, [U_n, \bar{U}_n]\}_1^T$  中各区间数  $[U_j, \bar{U}_j]_\lambda (j = 1, \dots, n, n$  为结构自由度总数) 的上、下界端点值由下式定义:

$$\left. \begin{aligned} U_j &= \min\{u_j \mid KU = P, \\ &K \in [K, \bar{K}]_\lambda, P \in [P, \bar{P}]_\lambda\} \\ \bar{U}_j &= \max\{u_j \mid KU = P, \\ &K \in [K, \bar{K}]_\lambda, P \in [P, \bar{P}]_\lambda\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中  $K$  为普通矩阵,  $P, U$  为普通列阵。根据模糊分解定理, 方程(7)的解可表示为:

$$\{U\} = \bigcup_{\lambda \in (0,1)} \lambda \{U, \bar{U}\}_\lambda \quad (10)$$

显然, 求解方程(7)的关键在于求解方程(8)。方程(8)是区间系数线性方程组, 目前尚无成熟的有效算法。作者将绕过方程(8), 直接求式(9)的  $U_j$  和  $\bar{U}_j (j = 1, \dots, n)$ 。

事实上, 节点位移是所有初始模糊参数  $S_i (i = 1, \dots, N_j)$  的函数, 而且可以将结构节点位移分成  $m$  类, 使每一类中的各个位移对初始模糊参数  $S_i (i \in 1, \dots, N_j)$  呈相同的增减关系。记

$$\left. \begin{aligned} \{\xi\} &= \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \\ \{\eta\} &= \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中  $\xi_q (q = 1, \dots, f_1)$  和  $\eta_g (g = 1, \dots, f_2)$  均为初始模糊参数, 并且第  $l (1 \leq l \leq m)$  类节点位移是  $\xi_q (q = 1, \dots, f_1)$  的增函数, 是  $\eta_g (g = 1, \dots, f_2)$  的减函数。对式(11)作  $\lambda$  截集:

$$\left. \begin{aligned} \{\xi\}_\lambda &= \{\underline{\xi}, \bar{\xi}\}_\lambda = \{[\underline{\xi}_1, \bar{\xi}_1], \dots, [\underline{\xi}_n, \bar{\xi}_n]\}_\lambda \\ \{\eta\}_\lambda &= \{\underline{\eta}, \bar{\eta}\}_\lambda = \{[\underline{\eta}_1, \bar{\eta}_1], \dots, [\underline{\eta}_n, \bar{\eta}_n]\}_\lambda \end{aligned} \right\}$$

计算刚度阵和荷载阵:

$$\left. \begin{aligned} [K^-] &= [K(\underline{\xi}_\lambda, \bar{\eta}_\lambda)] \\ [K^+] &= [K(\bar{\xi}_\lambda, \underline{\eta}_\lambda)] \\ [P^-] &= \{P(\underline{\xi}_\lambda, \bar{\eta}_\lambda)\} \\ [P^+] &= \{P(\bar{\xi}_\lambda, \underline{\eta}_\lambda)\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中  $[K^-]$  为取  $\{\xi\}_\lambda$  的下界和  $\{\eta\}_\lambda$  的上界所得总刚度

阵, 一般来说,  $[K^-]$  与式(8)中的  $[K]$  是不同的。式(12)中的  $[K^+], [P^-]$  和  $\{P^+\}$  的计算方法可以类推。

求解平衡方程:

$$[K^-]\{U^-\} = \{P^-\}, [K^+]\{U^+\} = \{P^+\} \quad (13)$$

其解分别为:

$$\left. \begin{aligned} \{U^-\} &= \{U_1^-, U_2^-, \dots, U_n^-\} \\ \{U^+\} &= \{U_1^+, U_2^+, \dots, U_n^+\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

记第  $l$  类节点的位移向量为  $\{u_l\} = \{u_j, u_i\}_\lambda$ , 在式(14)中与第  $l$  类节点相应的位移分量记为  $\{u_l^-\}$  和  $\{u_l^+\}$ , 则显然有

$$\{u_l\}_\lambda = \{u_l^-\}, \quad \{\bar{u}_l\}_\lambda = \{u_l^+\} \quad (15)$$

对所有  $m$  类节点位移重复式(11)至式(15)的计算过程, 然后将求得的  $\{u_l\}_\lambda$  和  $\{\bar{u}_l\}_\lambda (l = 1, \dots, m)$ , 按整体节点位移序号总装在一起, 便求得到式(9)定义的  $u_j$  和  $\bar{u}_j (j = 1, \dots, n)$ , 这也就是方程(8)的解  $\{u, \bar{u}\}_\lambda$ 。

取一系列不同的  $(0 < \lambda \leq 1)$ , 便可由式(10)得到方程(7)的解。

### 5 结语

本文讨论了杆系结构中有模糊转动弹性连接时单元刚度阵、荷载转移阵的计算以及结构模糊有限元平衡方程的解法。如果在式(10)中只取  $\lambda = 1$ , 则所得结果与普通有限元法结果相同。当  $\lambda$  取一系列  $[0, 1]$  间的值时, 由式(10)可得到模糊位移解, 这实际上是提供了有意义的附加信息, 供工程设计使用。

一般情况下, 计算工作量随初始模糊参数个数的增加而迅速增加。在实际计算时应应对结构仔细分析, 合理控制初始模糊参数个数, 使计算能顺利进行。

### 参 考 文 献

- [1] J M 盖尔, W 韦孚. 杆系结构分析[M]. 边启光译. 北京: 水利电力出版社, 1983. 300~305.
- [2] D 杜布瓦, H 普哈德. 模糊集与模糊系统——理论和应用[M]. 江苏省模糊数学专业委员会译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1987. 48~76.
- [3] 肖位枢. 模糊数学基础及应用[M]. 北京: 航天工业出版社, 1992. 60~80.
- [4] 冯紫良, 戴仁杰. 杆系结构的计算机分析[M]. 上海: 同济大学出版社, 1991. 20~50.
- [5] 吕恩琳. 结构模糊有限元平衡方程的一种新解法[J]. 应用数学和力学, 1997, 18(4): 361~366.
- [6] 吕恩琳. 模糊随机有限元平衡方程的摄动解法[J]. 应用数学和力学, 1997, 18(7): 631~638.

## The Finite Element Method for Frame Structure with Fuzzy Elastic Connections

LU En-lin, ZHONG YOU-ming, XIANG Shi-ming

(College of civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**ABSTRACT:** The connections of frame structure elements at a node are often an elastic connection between hinged and rigid. In this paper, the stiffness matrix and the loading transfer matrix of frame element with turn elastic connections is deduced, the cross shear effect has been taken into consideration simultaneously. The stiffness matrices of some bar elements, such as both ends of the bar are hinged or rigid and one end is hinged but the other is rigid, are special cases of the stiffness matrices presented in this paper. After pointing out that the elastic coefficient at a node of a bar element with elastic joint is really a fuzzy quantity, the fuzzy stiffness matrix of the bar element is obtained, and a solution to structural fuzzy finite element equilibrium equations is presented. The fuzzy solution obtained from above is not only containing the solution of ordinary finite element method but also providing some additional informations with practical value.

**KEYWORDS:** frame structure; elastic connection; fuzzy finite element method

(责任编辑 钟学恒)

\* \* \* \* \*

(上接 44 页)

## The Effects of Rare Earth Elements on the Graphitization of Ni-Fe Cast Iron Weld Metal

DAI Yuan-shu, TONG Yan-gang, PENG Gao-e, ZHOU Zhou-yu, LING Ze-min

(College of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**ABSTRACT:** The effects of rare earth elements La and Y on the graphitization of Ni-Fe cast iron weld metal are studied. It is shown that the La-contained welds are well-graphitized whilst the Y-contained welds are moderately graphitized. The results are favourably explained by a "bubbling" theory.

**KEYWORDS:** rare earth metals; graphitization; spheroidizing agents; manual electrodes

(责任编辑 李胜春)