

38-43

# 压电传感材料与结构的变形传递模型

张奔牛, 张俊乾, 黄尚廉

(重庆大学智能结构研究中心, 重庆 400044)

**摘要:** 对结构材料与压电陶瓷传感器的应力应变传递关系进行了研究。根据剪应力滞后分析, 提出了一种专门针对此智能材料的三层应力模型, 得到了结构材料与传感器之间的应变传递因子, 并通过计算机仿真实验, 分析了粘接层和压电层性质(弹性性质和厚度)对应变传递因子的影响。

**关键词:** 智能结构; 压电传感; 应变传递

**中图分类号:** TB 125; TB 381; TB 936

TP18

文献标识码: A

具有自诊断、自适应、自恢复及修补等功能的智能结构是一种具有巨大潜在价值的未来材料结构, 对航空、航天、建筑、机械制造等领域的发展将起到革命性的作用。目前的一种思想是在材料中埋入传感器, 测出材料变形后产生变化的应力应变信号, 然后把信号送入控制器, 按照一定模型算法处理, 最后向材料中的执行器送出控制信号。接收到控制信号的执行器随电信号的改变产生变形<sup>[1]</sup>, 对材料的变形进行补偿, 从而使材料智能化, 以实现材料的自我诊断和控制。

将片状压电材料(如压电陶瓷)粘贴于主体材料表面或复合于其内部, 既可作为传感元件, 亦可当作执行器使用。作为传感元件应用的时候, 压电片本身并未受到外力的作用, 结构材料的变形通过粘接剂传递到压电片, 使其产生伸长或缩短, 进而导致可以测量的压电片电荷改变。当压电片作为执行器使用的时候, 其原理与压电陶瓷传感器正好相反。利用外加电压使压电陶瓷产生伸缩变形, 由于压电陶瓷与结构材料粘接在一起, 不能自由伸缩而产生约束力, 此约束力通过粘接剂传递到结构材料中, 使材料产生附加的有利于控制目的的变形。从以上分析中可以看出, 无论压电片是作为传感元件还是执行器, 它与主体结构材料之间的应力和变形传递能力和效率是发挥压电片性能是否充分的关键所在。影响变形传递关系的因素很多, 包括粘接层的弹性模量和厚度、压电片本身的厚度和弹性模量以及它们与结构材料性质的相对比值。定量的

揭示这些参数对变形传递关系的影响, 将为智能结构和优化集成设计提供理论依据。

笔者将对压电片传感器与结构材料之间的应力变形传递机理进行分析, 提出三层模型来代表压电层、粘接层和主体材料。利用剪应力滞后分析方法<sup>[2,3]</sup>得到传感器应变与材料应变的关系, 进而获得应变传递因子 $k$ , 并通过计算机仿真实验的方法得到不同粘接剂、材料及它们的厚度变化对 $k$ 的影响。

## 1 变形传递模型

考虑压电片粘贴于结构材料表面的情况(如图1), 以上、中、下三层分别代表压电片、粘接层和主体材料, 他们的厚度分别为 $h_1$ 、 $h_2$ 、 $h_3$ , 压电片的长度为 $l$ 。在静力加载条件下, 由于粘接层的粘弹性表现并不明显, 只考虑其弹性特性, 即把三层材料都作为弹性材料处理。在外力作用下, 结构材料两端承受的拉力为 $T$ , 而压电层和粘接层的两端和自由表面无外加应力。虽然压电层和粘接层的两端不受应力, 但三层之间界面的剪切应力将结构材料层(第三层)的轴向应力传递到粘接层和压电层, 使距离端部的某一截面也承受轴向应力。

建立图1所示直角坐标系, 并假设 $xz$ 平面的变形为平面应力, 这一假设对于压电片较窄的情形是一种较好的近似。三层的平衡如图2所示, 由图可以得到以下平衡方程:

· 收稿日期: 1999-10-10

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(59635140)和面上项目(59503003)资助

作者简介: 张奔牛(1975-), 男, 重庆人, 重庆大学硕士研究生。主要研究方向为智能结构、固体力学、电子工程。

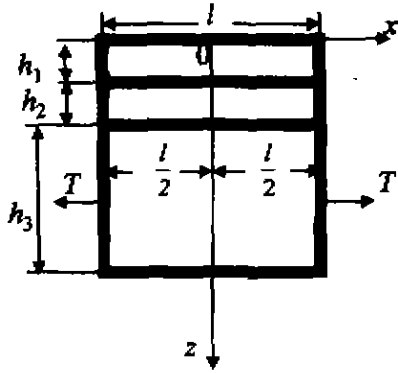


图 1 变形传递三层模型

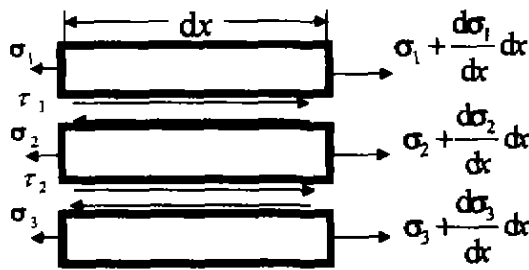


图 2 各层分离平衡

$$\tau_1 + \frac{d\sigma_1}{dx} h_1 = 0 \quad (1a)$$

$$\tau_2 - \tau_1 + \frac{d\sigma_2}{dx} h_2 = 0 \quad (1b)$$

$$-\tau_2 + \frac{d\sigma_3}{dx} h_3 = 0 \quad (1c)$$

其中  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  分别是三层的轴向应力,  $\tau_1, \tau_2$  为界面剪应力。由图 1 可得以下边界条件:

$$\sigma_3 = T, \text{ 当 } x = -\frac{l}{2} \text{ 和 } x = \frac{l}{2} \quad (2a)$$

$$\sigma_2 = 0, \text{ 当 } x = -\frac{l}{2} \text{ 和 } x = \frac{l}{2} \quad (2b)$$

$$\sigma_1 = 0, \text{ 当 } x = -\frac{l}{2} \text{ 和 } x = \frac{l}{2} \quad (2c)$$

$$\sigma_{xz1} = 0, \text{ 当 } z = 0 \quad (2d)$$

$$\sigma_{xz3} = 0, \text{ 当 } z = h_1 + h_2 + h_3 \quad (2e)$$

式中  $\sigma_{xz}$  为  $xz$  面内的剪应力、界面的位移和应力连续条件为:

$$u_1 = u_2, \text{ 当 } z = h_1 \quad (3a)$$

$$u_2 = u_3, \text{ 当 } z = h_1 + h_2 \quad (3b)$$

$$\sigma_{xz1} = \sigma_{xz2} = \tau_1, \text{ 当 } z = h_1 \quad (3c)$$

$$\sigma_{xz2} = \sigma_{xz3} = \tau_2, \text{ 当 } z = h_1 + h_2 \quad (3d)$$

其中  $u_1, u_2, u_3$  分别为第一、二、三层的轴向位移。

为了得到位移和剪应力之间的关系,根据文献[2, 3]发展的剪切应力滞后方法,假设在  $z$  方向上每一层的轴向位移呈抛物线变化:

$$u_1 = c_1 z^2 + c_2 z + c_3 \quad (4a)$$

$$u_2 = c_4 z^2 + c_5 z + c_6 \quad (4b)$$

$$u_3 = c_7 z^2 + c_8 z + c_9 \quad (4c)$$

其中  $c_i (i = 1, 2, \dots, 9)$  是  $x$  的待定函数。剪应力可以表示为:

$$\sigma_{xz1} = G_1 \gamma_{xz1} \approx G_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = G_1 (2c_1 z + c_2) \quad (5a)$$

$$\sigma_{xz2} = G_2 \gamma_{xz2} \approx G_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = G_2 (2c_4 z + c_5) \quad (5b)$$

$$\sigma_{xz3} = G_3 \gamma_{xz3} \approx G_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} = G_3 (2c_7 z + c_8) \quad (5c)$$

其中  $\gamma_{xz}$  为平面内的剪切应变,  $G_1, G_2, G_3$  分别为第一、二、三层的剪切弹性模量。

由边界条件(2d, 2e)和连续条件(3a-3d)可得(详见附录 1):

$$c_1 = V_1 \tau_1 \quad (6a)$$

$$c_2 = 0 \quad (6b)$$

$$c_4 = V_2 \tau_1 + V_3 \tau_2 \quad (6c)$$

$$c_5 = V_4 \tau_1 + V_5 \tau_2 \quad (6d)$$

$$c_7 = V_6 \tau_2 \quad (6e)$$

$$c_8 = V_7 \tau_2 \quad (6f)$$

$$c_6 - c_3 = V_8 \tau_1 + V_9 \tau_2 \quad (6g)$$

$$c_9 - c_6 = V_{10} \tau_1 + V_{11} \tau_2 \quad (6h)$$

其中  $V_i (i = 1 - 11)$  为常数,可由  $G_i (i = 1 - 3)$  和  $h_i (i = 1 - 3)$  唯一确定(附录 1)。由上式及式(4a - c)可得(附录 2):

$$\bar{u}_2 - \bar{u}_1 = U_1 \tau_1 + U_2 \tau_2 \quad (7a)$$

$$\bar{u}_3 - \bar{u}_2 = U_3 \tau_1 + U_4 \tau_2 \quad (7b)$$

其中  $U_i (i = 1, 2, 3, 4)$  是常数,  $\bar{u}_i (i = 1, 2, 3)$  表示沿厚度平均后的轴向位移。

由应变 - 位移关系和应力 - 应变关系可以得到:

$$\frac{d\bar{u}_1}{dx} = \epsilon_{x1} = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (8a)$$

$$\frac{d\bar{u}_2}{dx} = \epsilon_{x2} = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (8b)$$

$$\frac{d\bar{u}_3}{dx} = \epsilon_{x3} = \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (8c)$$

式中  $\epsilon_{xi} (i = 1, 2, 3)$  为第一、二和三层的轴向应变;  $E_i (i = 1, 2, 3)$  分别为三层的轴向弹性模量。

适当地组合式(1)、(7)和(8),并利用边界条件(2a~2c),可得以轴向应力表示的控制微分方程(详见附录3):

$$U_1 h_1 \frac{d^2 \sigma_1}{dx^2} - U_2 h_3 \frac{d^2 \sigma_3}{dx^2} - \left( \frac{1}{E_1} + \frac{h_1}{h_2 E_2} \right) \sigma_1 - \frac{h_3}{h_2 E_2} \sigma + \frac{h_3}{h_2 E_2} T = 0 \quad (9a)$$

$$U_3 h_1 \frac{d^2 \sigma_1}{dx^2} - U_4 h_3 \frac{d^2 \sigma_3}{dx^2} + \frac{h_1}{h_2 E_2} \sigma_1 + \left( \frac{1}{E_3} + \frac{h_3}{h_2 E_2} \right) \sigma_1 - \frac{h_3}{h_2 E_2} T = 0 \quad (9b)$$

该方程的解为

$$\sigma_1 = [2b_1 \cosh(\alpha_1 x) + 2b_2 \cosh(\alpha_2 x) - q_3] T \quad (10a)$$

$$\sigma_3 = [2N_1 b_1 \cosh(\alpha_1 x) + 2N_2 b_3 \cosh(\alpha_2 x) - N_3] T \quad (10b)$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2, b_1, b_3, N_1, N_2, N_3, q_3$  为常数(详见附录3)。将式(10)代入应力应变关系(8a,8c),可以得到:

$$\epsilon_1 = [2D_1 \cosh(\alpha_1 x) + 2D_2 \cosh(\alpha_2 x) + D_3] \bar{\epsilon}_3 \quad (11a)$$

$$\epsilon_3 = [2D_4 \cosh(\alpha_1 x) - 2D_5 \cosh(\alpha_2 x) + D_6] \bar{\epsilon}_3 \quad (11b)$$

其中  $D_1 = E_3 b_1 / E_1, D_2 = E_3 b_3 / E_1, D_3 = -E_3 q_3 / E_1, D_4 = N_1 b_1, D_5 = N_2 b_3, D_6 = N_3, \bar{\epsilon} = T / E_3$ 。

由式(11)可以看出,压电层和主体材料层中的轴向应变是随  $x$  变化的。而测出的电压为整片压电层的总电压,它反映的是压电片内  $(-l/2, l/2)$  的平均轴向应变。为此,我们将主体材料层和压电层之间的应变传递因子定义为在区间  $(-l/2, l/2)$  内第三层的平均应变和第一层的平均应变之间的比,即

$$k = \frac{\bar{\epsilon}_3}{\bar{\epsilon}_1} = \frac{\int_{-l/2}^{l/2} \epsilon_3 dx}{\int_{-l/2}^{l/2} \epsilon_1 dx} \quad (12)$$

将式(11)代入上式,可以得到

$$k = \frac{4D_4 \alpha_1 \sinh\left(\frac{\alpha_1 l}{2}\right) + 4D_5 \alpha_1 \sinh\left(\frac{\alpha_2 l}{2}\right) + D_6 \alpha_1 \alpha_2 l}{4D_1 \alpha_1 \sinh\left(\frac{\alpha_1 l}{2}\right) + 4D_2 \alpha_1 \sinh\left(\frac{\alpha_2 l}{2}\right) + D_3 \alpha_1 \alpha_2 l} \quad (13)$$

所以在各层的厚度、弹性常数已知的条件下,通过式(13)易求出传感器与被测物体的应变传递因子。

## 2 计算机仿真实验

在建立了模型和获得平均应变传递因子公式后,对不同材料和情况的应变传递因子进行了计算机仿真实验。首先,在保持压电陶瓷及被测物体几何和弹性性能不变的情况下,考察界面层厚度及弹性模量对应变传递因子的影响。图3给出了应变传递因子  $k$  与粘结层厚度  $h_2$  的关系曲线,不同的  $k-h_2$  曲线对应着不同的粘结层杨氏模量  $E_2$ ,由图可见,对所有的  $E_2$  值,在  $h_2$  为零,即理想粘接时,  $k$  的值聚于一点,此时应变传递只取决于压电片的厚度和弹性而没有粘接剂的影响。 $k$  随粘结层厚度  $h_2$  的增大而增加,表明粘结层越厚结构的变形至压电片的传递愈困难,说明为了使测量准确,应尽量地减小粘接层的厚度。

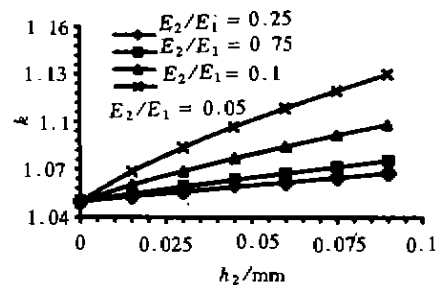


图3  $k-h_2$  关系图

( $E_1 = 63 \text{ GPa}, E_3 = 75 \text{ GPa}, \nu_1 = 0.43, \nu_2 = 0.33, \nu_3 = 0.42, h_1 = 0.2 \text{ mm}, h_3 = 1 \text{ mm}, l = 20 \text{ mm}$ )

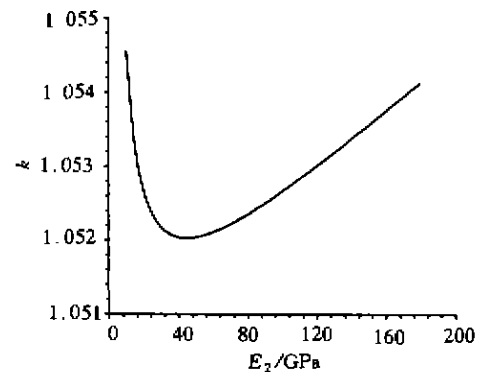


图4  $k-E_2$  关系图

( $E_1 = 63 \text{ GPa}, E_3 = 75 \text{ GPa}, \nu_1 = 0.43, \nu_2 = 0.33, \nu_3 = 0.42, h_1 = 0.2 \text{ mm}, h_2 = 0.01 \text{ mm}, h_3 = 1 \text{ mm}, l = 20 \text{ mm}$ )

图4为固定粘结层厚度  $h_2$  时  $k$  与  $E_2$  曲线,  $k$  开始随弹性模量的增加而减小,当  $E_2$  超过某一临界值后,

$k$  随  $E_2$  而增加。这表明,对某一被测物体在选定传感压电片后,存在优化的粘结层模量,  $E_2$  小于或大于这一优化值时,变形传递都更困难。

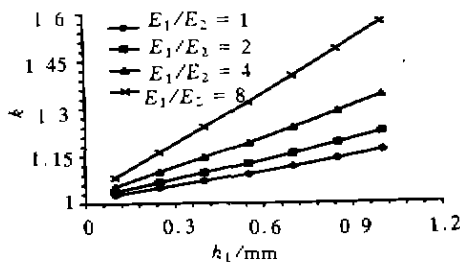


图 5  $k-h_1$  关系图

( $E_2 = 39 \text{ GPa}, E_3 = 75 \text{ GPa}, \nu_1 = 0.43, \nu_2 = 0.33, \nu_3 = 0.42, h_2 = 0.01 \text{ mm}, h_3 = 1 \text{ mm}, l = 20 \text{ mm}$ )

图 5 表达了应变传递因子  $k$  与压电陶瓷厚度  $h_1$  的关系曲线,不同的  $k-h_1$  曲线代表不同的压电陶瓷杨氏模量  $E_1$ 。从图可以看出,与  $k-h_2$  曲线类似,对所有的  $E_1$  值,  $k$  随压电陶瓷的厚度  $h_1$  的增大也增加,表明为了获得好的变形传递效果,应尽量选择厚度较薄的压电陶瓷片。由图还可知,对应较小弹性模量  $E_1$  的  $k-h_1$  曲线位于对应较大  $E_1$  的  $k-h_1$  曲线的下方,说明  $E_1$  愈小  $k$  愈小,也就是说,较软的压电片具有较好的变形传递效果。

### 3 结论

我们建立了压电传感片与结构之间的变形传递模型,提出了用应变传递因子的概念来表征结构与传感元件之间的变形传递关系。通过剪应力滞后分析方法,得到了应变传递因子的解析表达式。利用该表达式,可将压电陶瓷测得的应变值转化成结构的真实应变。计算机仿真的结果表明:模型能很好的模拟理想粘接的状态,为了使测量准确,应尽可能的减小粘接层的厚度;对某一被测物体在选定传感压电片后,存在优化的粘结层模量,其小于或大于这一优化值时,变形传递都更困难;为了获得好的变形传递效果,应尽量选择厚度较薄的压电陶瓷片,且较软的压电片具有较好的变形传递效果。

尽管本文只建立了三层材料模型,但只要增加剪应力分量的个数,依照同样的方法也可以推出多层材料的应变传递因子。需要指出的是,本文假设粘接剂为线弹性材料,在动力加载和高温时,粘接剂可能表现出粘弹性特性,需要进一步的研究。

### 参考文献:

- [1] SHEN J Y, SHARPE L, LU M F Deflection control of beam-like structures by using piezoelectric sensor and actuator[J]. Smart Structures & Materials. SPIE, 1995, 2443:622-629
- [2] ZHANG J, FAN J, SOUTIS C. Analysis of multiple matrix cracking in  $[\pm \theta_m/90_n]$  composite laminates, part 1: in-plane stiffness properties[J]. Composites, 1992, 23:291-298.
- [3] LEE J W, DANIEL I M Progressive transverse cracking of cross-ply composites laminates[J]. Composite Materials, 1990, 24:1 225-1 243.

### 附录 1: 常数 $V_i$ 的表达式

将式(4a ~ c), (5a ~ c) 代入边界条件(2d, 2e) 和连续条件(3a ~ 3d), 可得:

$$c_2 = 0 \tag{1a}$$

$$2c_7(h_1 + h_2 + h_3) + c_8 = 0 \tag{1b}$$

$$c_1 h_1^2 + c_2 h_1 + c_3 = c_4 h_1^2 + c_5 h_1 + c_6 \tag{1c}$$

$$c_4(h_1 + h_2)^2 + c_5(h_1 + h_2) - c_6 = c_7(h_1 + h_2)^2 + c_8(h_1 + h_2) + c_9 \tag{1d}$$

$$G_1(2c_1 h_1 + c_2) = \tau_1 \tag{1e}$$

$$G_2(2c_4 h_1 + c_5) = \tau_1 \tag{1f}$$

$$G_2[2c_4(h_1 + h_2) + c_5] = \tau_2 \tag{1g}$$

$$G_3[2c_7(h_1 + h_2) + c_8] = \tau_2 \tag{1h}$$

求解上式, 可得

$$c_1 = V_1 \tau_1$$

$$c_2 = 0$$

$$c_4 = V_2 \tau_1 + V_3 \tau_2$$

$$c_5 = V_4 \tau_1 + V_5 \tau_2$$

$$c_7 = V_6 \tau_2$$

$$c_8 = V_7 \tau_2$$

$$c_6 - c_3 = V_8 \tau_1 + V_9 \tau_2$$

$$c_9 - c_6 = V_{10} \tau_1 + V_{11} \tau_2$$

式中

$$V_1 = \frac{1}{2G_1 h_1} \quad V_2 = \frac{-1}{2G_2 h_2}$$

$$V_3 = \frac{1}{2G_2 h_2} \quad V_4 = \frac{h_1 + h_2}{G_2 h_2}$$

$$V_5 = -\frac{h_1}{G_2 h_2} \quad V_6 = \frac{-1}{2G_3 h_3} \quad V_7 = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{G_3 h_3}$$

$$V_8 = \frac{h_1}{2G_1} - \frac{h_1^2}{2G_2 h_2} - \frac{h_1}{G_2}$$

$$V_9 = \frac{h_1^2}{2G_2h_2} \quad V_{10} = \frac{(h_1 + h_2)^2}{2G_2h_2}$$

$$V_{11} = \frac{h_2^2 - h_1^2}{2G_2h_2} - \frac{h_1 + h_2}{G_3} - \frac{(h_1 + h_2)^2}{2G_3h_3}$$

## 附录2: 方程(7a, b)的推导

平均位移:

$$\bar{u}_1 = \frac{\int_0^{h_1} u_1(z) dz}{h_1} = c_1 \frac{h_1^2}{3} + c_2 \frac{h_1}{2} + c_3 \quad (2a)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{\int_{h_1}^{h_1+h_2} u_2(z) dz}{h_2} =$$

$$c_4 \frac{(h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_1(h_1 + h_2)}{3} +$$

$$c_5 \frac{2h_1 + h_2}{2} + c_6 \quad (2b)$$

$$\bar{u}_3 = \frac{\int_{h_1+h_2}^{h_1+h_2+h_3} u_3(z) dz}{h_3} =$$

$$c_7 \frac{(h_1 + h_2 + h_3)^2 + (h_1 + h_2)(h_1 + h_2 + h_3) + (h_1 + h_2)^2}{3} +$$

$$c_8 \frac{2h_1 + 2h_2 + h_3}{2} + c_9 \quad (2c)$$

$$\text{令 } W_1 = \frac{h_1^2}{3} \quad (3a)$$

$$W_2 = \frac{(h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_1(h_1 + h_2)}{3} \quad (3b)$$

$$W_3 = \frac{2h_1h_2}{2} \quad (3c)$$

$$W_4 = \frac{(h_1 + h_2 + h_3)^2 + (h_1 + h_2)(h_1 + h_2 + h_3) + (h_1 + h_2)^2}{3} \quad (3d)$$

$$W_5 = \frac{2h_1 + 2h_2 + h_3}{2} \quad (3e)$$

从式(2a ~ 2c)和正文式(6a ~ 6h)可得

$$\bar{u}_2 - \bar{u}_1 = U_1\tau_1 + U_2\tau_2 \quad (4a)$$

$$\bar{u}_3 - \bar{u}_2 = U_3\tau_1 + U_4\tau_2 \quad (4b)$$

式中

$$U_1 = V_2W_2 + V_4W_3 - V_1W_1 + V_8 \quad (5a)$$

$$U_2 = V_3W_2 + V_5W_3 + V_9 \quad (5b)$$

$$U_3 = V_{10} - V_2W_2 - V_4W_3 \quad (5c)$$

$$U_4 = V_{11} - V_3W_2 - V_5W_3 +$$

$$V_6W_4 + V_7W_5 \quad (5d)$$

## 附录3: 方程(9a, b)的推导及其求解

由正文式(1)得:

$$\frac{d\sigma_1}{dx}h_1 + \frac{d\sigma_2}{dx}h_2 + \frac{d\sigma_3}{dx}h_3 = 0 \quad (6)$$

又由正文边界条件(2a - c)可得:

$$\sigma_1h_1 + \sigma_2h_2 + \sigma_3h_3 = Th_3 \quad (7)$$

推出:

$$\sigma_2 = \frac{h_1}{h_2}\sigma_1 - \frac{h_3}{h_2}\sigma_3 + \frac{h_3}{h_2}T \quad (8)$$

由正文式(1)、(7)、(8)得:

$$\frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\sigma_1}{E_1} = -U_1h_1 \frac{d^2\sigma_1}{dx^2} + U_2h_3 \frac{d^2\sigma_3}{dx^2} \quad (9a)$$

$$\frac{\sigma_3}{E_3} - \frac{\sigma_2}{E_2} = -U_3h_1 \frac{d^2\sigma_1}{dx^2} + U_4h_3 \frac{d^2\sigma_3}{dx^2} \quad (9b)$$

把 $\sigma_2$ 代入上式得:

$$U_1h_1 \frac{d^2\sigma_1}{dx^2} - \left\{ \frac{1}{E_1} + \frac{h_1}{h_2E_2} \right\} \sigma_1 + \frac{h_3}{h_2E_2}T =$$

$$U_2h_3 \frac{d^2\sigma_3}{dx^2} + \frac{h_3}{h_2E_2}\sigma_3 \quad (10a)$$

$$U_3h_1 \frac{d^2\sigma_1}{dx^2} + \frac{h_1}{h_2E_2}\sigma_1 - \frac{h_3}{h_2E_2}T =$$

$$U_4h_3 \frac{d^2\sigma_3}{dx^2} - \left\{ \frac{1}{E_3} + \frac{h_3}{h_2E_2} \right\} \sigma_3 \quad (10b)$$

由式(10a, b)可得到一个 $\sigma_1$ 与 $\sigma_3$ 的关系式:

$$(U_1U_4 - U_2U_3)h_1 \frac{d^2\sigma_1}{dx^2} -$$

$$\left[ \frac{U_4}{E_1} + \frac{h_1}{h_2E_2}(U_2 + U_4) \right] \sigma_1 + \frac{h_3}{h_2E_2}(U_4 + U_2)T =$$

$$\left[ \frac{U_2}{E_3} + \frac{h_3}{h_2E_2}(U_4 + U_2) \right] \sigma_3 \quad (11)$$

令:

$$M_1 = (U_1U_4 - U_2U_3)h_1$$

$$M_2 = \frac{U_4}{E_1} + \frac{h_1}{h_2E_2}(U_2 + U_4)$$

$$M_3 = \frac{h_3}{h_2E_2}(U_4 + U_2)$$

$$M_4 = \frac{U_2}{E_3} + \frac{h_3}{h_2E_2}(U_4 + U_2)$$

则上式可表示为:

$$M_1 \frac{d^2\sigma_1}{dx^2} - M_2\sigma_1 + M_3T = M_4\sigma_3 \quad (12)$$

令:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= U_1 h_1 \\
 I_2 &= - \left( \frac{1}{E_1} + \frac{h_1}{h_2 E_2} \right) \\
 I_3 &= \frac{h_3}{h_2 E_2} \\
 I_4 &= U_2 h_3 \quad I_5 = \frac{h_3}{h_2 E_2}
 \end{aligned}$$

则式 (10a) 又可表示为:

$$I_1 \frac{d^2 \sigma_1}{dx^2} + I_2 \sigma_1 + I_3 T = I_4 \frac{d^2 \sigma_3}{dx^2} + I_5 \sigma_3 \quad (13)$$

联解式 (12)、(13) 得:

$$f_1 \frac{d^4 \sigma_1}{dx^4} + f_2 \frac{d^2 \sigma_1}{dx^2} + f_3 \sigma_1 + f_4 T = 0 \quad (14)$$

其中:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= I_4 M_1 \\
 f_2 &= I_5 M_1 - I_4 M_2 - I_1 M_4 \\
 f_3 &= -I_5 M_2 - I_2 M_4 \\
 f_4 &= I_5 M_3 - I_3 M_4
 \end{aligned}$$

令:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{f_2}{f_1} & q_2 &= \frac{f_3}{f_1} \\
 q_3 &= \frac{f_4}{f_1} & \Delta &= q_1^2 - 4 \times q_2
 \end{aligned}$$

解方程 (14) 得:

$$\sigma_1 = (b_1 e^{\alpha_1 x} + b_2 e^{-\alpha_1 x} + b_3 e^{\alpha_2 x} + b_4 e^{-\alpha_2 x} - q_3)^T \quad (15)$$

其中  $b_1, b_2, b_3, b_4$  是常数,  $\alpha_1 = \sqrt{\frac{-q_1 + \sqrt{\Delta}}{2}}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{-q_1 - \sqrt{\Delta}}{2}}$

把  $\sigma_1$  代入式 (12) 可得:

$$\sigma_3 = [N_1 (b_1 e^{\alpha_1 x} + b_2 e^{-\alpha_1 x}) + N_2 (b_3 e^{\alpha_2 x} + b_4 e^{-\alpha_2 x}) + N_3]^T \quad (16)$$

其中  $N_1 = \frac{M_1 \alpha_1^2 - M_2}{M_4}, N_2 = \frac{M_1 \alpha_2^2 - M_2}{M_4}, N_3 = \frac{M_3 + M_2 q_3}{M_4}$

由正文边界条件 (2a) 和 (2c) 可算出常数值:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= b_2 = \frac{1 - N_2 q_3 - N_3}{2(N_1 - N_2) \cosh\left(\frac{\alpha_1 l}{2}\right)} \\
 b_3 &= b_4 = \frac{1 - N_1 q_3 - N_3}{2(N_2 - N_1) \cosh\left(\frac{\alpha_2 l}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= [2b_1 \cosh(\alpha_1 x) + 2b_3 \cosh(\alpha_2 x) - q_3] T \quad (17) \\
 \sigma_3 &= [2N_1 b_1 \cosh(\alpha_1 x) + 2N_2 b_3 \cosh(\alpha_2 x) + N_3] T \quad (18)
 \end{aligned}$$

## Deformation Transfer in Smart Structures with Integrated Piezoceramic Sensors

ZHANG Ben-niu, ZHANG Jun-qian, HUANG Shang-lian

(Center for Intelligent Structures, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** The deformation transfer from the loaded material to the piezoceramic sensor bounded on the surface of structures is investigated. The strain transfer factor,  $k$ , is proposed for the characterization of the deformation transfer from the material measured to the sensor. A three-layer model, which consists of the sensor, the adhesive and the material measured, is used for modelling of the deformation within the structure/sensor system. Using a shear-lag stress analysis method, the strain field within the three-layer structure is analyzed. The closed-form expression for the strain transfer factor is derived by using the strain field obtained. The influences of the thickness and the elastic modulus of the sensor and the adhesive on the  $k$  are predicted and illustrated.

**Key words:** intelligent structure; piezo-sensors; strain transfer

(责任编辑 张小强)