文章编号:1000-582x(2000)04-0064-04

64-67

初应力场的 Rayleigh 波*

张培源[1], 卢晓霞[1], 严 波[1], 汪天庚[2]
(1. 重庆大学 建筑工程学院,重庆 400044; 2. 西南石油大学 机械系,南充 637000)

摘 要: 讨论初应力场中 Rayleigh 波速的计算。这种情况下,Rayleigh 波的传播就是迭加在预应力位形上的小变形运动。由于受初应力的影响,计算 Rayleigh 波速的公式变得复杂。用初应力修正介质的弹性模量后,波速方程成为简单的 6 次代数方程,其中 5 次项,3 次项,1 次项为零。与无初应力情况相似的这个方程易于求解。数值结果说明了初应力对 Rayleigh 波速有显著的影响。

关键词: 弹性波; 初应力; 瑞利波
中图分类号: O 347.4 **文献标识码**:A

岩土工程、矿业工程等领域涉及初应力对弹性波的影响,这是迭加在一定变形上的连续体小扰动弹性动力学问题。虽然已经对这一问题形成了理论体系[1-6],由于边值问题的复杂性,一些具体的数值结果报导甚少,且很难直接地体现初应力分量的影响。作者的目的是提出一种简洁的方法以计算均匀初应力分量对 Hooke 介质中 Rayleigh 波传播速度的影响[9]。

1 基本方程

用 x_i、ξ_i、u_i 分别表示物质坐标、空间坐标和位移,他们都在同一直线直角坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中描写,且有关系

$$\xi_j = x_j + u_j(x,t) \tag{1}$$

参考位形上的初应力记作 S^0_{kl},这是静态应力场,满足平衡方程

$$S^0_{kl} + \rho f^0_l = 0 \tag{2}$$

式中 ρ 和 f_l 分别为密度与体力。即时位形上的应力可以用 Cauchy 应力、或者第一类 P-K 应力,或者第二类 P-K 应力描写,分别记作 σ_{kl}、T_{pl} 和 S_{pq}。按文献[7]:

$$\sigma_{kl} = \frac{1}{J}\xi_{k,p}T_{pl} = \frac{1}{J}\xi_{k,p}\xi_{l,q}S_{pq}$$
$$\xi_{k,p} = \delta_{kp} + \epsilon u_{k,p}$$
$$J = \det(\xi_{k,p})$$

定义增量应力 $\bar{\sigma}_{kl}$、$\bar{T}_{pl}$、$\bar{S}_{pq}$ 分别为[6]

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{kl} &= \sigma_{kl} - S^0_{kl}\\ \bar{T}_{pl} &= T_{pl} - S^0_{pl}\\ \bar{S}_{pq} &= S_{pq} - S^0_{pq}\end{aligned} \tag{3}$$

在小变形条件下,$|u_{i,k}| \ll 1$,有一阶近似关系如文献[6]

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{kl} &= \bar{T}_{kl} + u_{k,p}S^0_{pl} - u_{m,m}S^0_{kl}\\ \bar{\sigma}_{kl} &= \bar{S}_{kl} + u_{k,p}S^0_{pl} + S^0_{kq}u_{l,q} - u_{m,m}S^0_{kl}\\ \bar{T}_{kl} &= \bar{S}_{kl} + S^0_{kp}u_{l,p}\end{aligned} \tag{4}$$

和动量方程

$$\bar{T}_{kl} + \rho(\bar{f}_l - \ddot{u}_l) = 0 \tag{5}$$

式中 $\rho\bar{f}_l$ 表示即时位形体力与参考位形体力 ρf^0_l 之差 $\rho\bar{f}_l = \rho f_l - \rho f^0_l$, $\ddot{u}_l = \dfrac{\partial^2 u_l(x,t)}{\partial^2 t}$。

如果增量应力 $\bar{S}_{kl}$ 和小应变 e_{kl} 之间服从 Hooke 介质的关系:

$$\bar{s}_{kl} = [\lambda\delta_{kl}\delta_{mn} + G(\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{kn}\delta_{lm})]e_{mn} \tag{6}$$

式中小变形应力 e_{mn} 与小变形位移有 Cauchy 关系

* 收稿日期:1999-09-30
基金项目:国家油气藏地质及开发重点实验室资助项目(PLN9705)
作者简介:张培源(1941-),男,重庆人,重庆大学教授。主要从事固体力学的科研和教学工作。

$$e_{mn} = (u_{m,n} + u_{n,m})/2 \tag{7}$$

λ, G 为 Lame 弹性常数，那么方程(5) 通过式(4)、(6) 和(7) 可以用 u_k 表示，成为

$$(\lambda + G)u_{m,ml} + Gu_{l,mm} + S^0_{km}u_{l,km} + \rho(\bar{f}_l - \ddot{u}_l + f^0_q u_{l,q}) = 0 \tag{8}$$

这就是初应力小扰动 Hooke 介质动力学控制方程。如果初应力是均匀的，$f^0_q = 0$，当 $\bar{f}_l = 0$，方程(8) 成为齐次方程

$$(\lambda + G)u_{m,ml} + Gu_{l,mm} + S^0_{km}u_{l,km} - \rho\ddot{u}_l = 0 \tag{9}$$

如果同一表面元素在参考位形和即时位形的外法线单位矢分别为 n_k 和 n'_k，所受外加面力分别为 p_l 和 p'_l，用应力表示的边界条件可写作：

$$S^0_{kl}n_k = p_l \qquad \sigma_{kl}n'_k = p'_l$$

由这两方程，利用 Nanson 公式[9]，得到用增量应力表示的应力边界条件

$$\bar{T}_{kl}n_k + s^0_{kl}(e_{pq}n_pn_q - e_{mm})n_k = \bar{p}_l \tag{10}$$

这里 $\bar{p}_l = p'_l - p_l$。例如在半空间 $x_2 \geqslant 0$ 的界面 $x_2 = 0$ 上，式(10) 用位移表示为

$$\begin{aligned}
&G(u_{1,2} + u_{2,1}) - S^0_{21}u_{3,3} + S^0_{22}u_{1,2} + S^0_{23}u_{1,3} = \bar{p}_1 \\
&\lambda(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) + 2Gu_{2,2} - \\
&\quad S^0_{22}(u_{1,1} - u_{2,2} + u_{3,3}) + S^0_{21}u_{2,1} + S^0_{23}u_{2,3} = \bar{p}_2 \\
&G(u_{2,3} + u_{3,2}) - S^0_{23}u_{1,1} + S^0_{21}u_{3,1} + S^0_{22}u_{3,2} = \bar{p}_3
\end{aligned} \tag{11}$$

2　半空间的 Rayleigh 波

试讨论齐次方程(9)，在如下边界条件下

$$\begin{aligned}
x_2 = 0 \qquad \bar{p}_1 = 0 \\
\bar{p}_2 = 0 \qquad \bar{p}_3 = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

具有如下形式的解

$$\begin{aligned}
x_2 \geqslant 0: u_j = U_j\exp[-\alpha x_2 + i(sx_1 - pt)] \quad j = 1,2 \\
u_3 = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

式中 $\sqrt{-1} = i$，α、s、p、U_j 均为常量，解的有界性要求 α 的实部非负，s 和 p 为实数。如果 α 虚部为零，p/s 表示沿 ox_1 方向传播的波速。

把式(13) 代入方程(9)，如果 ox_1、ox_2 分别为均匀常张量 S^0_{kl} 的主方向，得到关于 U_1U_2 的线性代数方程：

$$\begin{bmatrix} -(\lambda + 2G + S^0_{11})s^2 + (G + S^0_{22})\alpha^2 - \rho p^2 & -ias(\lambda + G) \\ -ias(\lambda + G) & -(G + S^0_{11})s^2 + (\lambda + 2G + S^0_{22})\alpha^2 - \rho p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

U_1U_2 有非零解要求系数行列式为零。可以证明这个条件可以写作

$$\begin{aligned}
&(G + S^0_{22})(\lambda + 2G + S^0_{22}) \times \Big\{\frac{\alpha^4}{s^4} - \\
&\frac{\alpha^2}{s^2}\Big[1 + \frac{S^0_{11} - S^0_{22}}{\lambda + 2G + S^0_{22}} - \frac{\rho p^2/s^2}{\lambda + 2G + S^0_{22}} + \\
&1 + \frac{S^0_{11} - S^0_{22}}{G + S^0_{22}} - \frac{\rho p^2/s^2}{G + S^0_{22}}\Big] + \\
&\Big(1 + \frac{S^0_{11} - S^0_{22}}{\lambda + 2G + S^0_{22}} - \frac{\rho p^2/s^2}{\lambda + 2G + S^0_{22}}\Big) \cdot \\
&\Big(1 + \frac{S^0_{11} - S^0_{22}}{G + S^0_{22}} - \frac{\rho p^2/s^2}{G + S^0_{22}}\Big) = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

因此易于对 α 求根，用 α_1 和 α_2 表示非负实部的两个根

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^2}\alpha_1^2 = 1 + \frac{S^0_{11} - S^0_{22} - \rho p^2/s^2}{\lambda + 2G + S^0_{22}}, \\
\frac{1}{s^2}\alpha_2^2 = 1 + \frac{S^0_{11} - S^0_{22} - \rho p^2/s^2}{G + S^0_{22}}
\end{aligned} \tag{16}$$

与根 α_1 和 α_2 对应，方程(14) 的解分别为

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2] = A[s, i\alpha] \\
[U_1, U_2] = A_2[-i\alpha, s]
\end{aligned} \tag{17}$$

因此解(17) 可以用迭加两根相应部分表示

$$\begin{aligned}
u_1 = A_1s\exp[-\alpha_1x_2 + i(sx_1 - pt)] - \\
iA_2\alpha_2\exp[-\alpha_2x_2 + i(sx_1 - pt)] \\
u_2 = iA_1\alpha_1\exp[-\alpha_1x_2 + i(sx_1 - pt)] + \\
A_2s\exp[-\alpha_2x_2 + i(sx_1 - pt)]
\end{aligned} \tag{18}$$

在式(11)中取 $\bar{p}_1$、$\bar{p}_2$、$\bar{p}_3$ 为零,注意到 $u_3=0$,$u_{1,3}=u_{2,3}=0$,用式(18)代入后得到关于 A_1A_2 的线性代数方程

$$\begin{bmatrix} -s\alpha_1(2G+S_{22}^0) & i[Gs^2+(G+S_{22})\alpha_2^2] \\ i[(\lambda-S_{22}^0)s^2-(\lambda+2G+S_{22})\alpha_1^2] & -2s\alpha_1(G+S_2^0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

A_1A_2 有非零解要求系数行列式为零,得到

$$2s^2\alpha_1\alpha_2(2G+S_{22}^0)(G+S_{22}^0)-[(\lambda+2G+S_{22}^0)\alpha_1^2-(\lambda-S_{22}^0)]\cdot[(G+S_{22}^0)\alpha_2^2+Gs^2]=0 \tag{20}$$

引入记号

$$c=\frac{p}{s} \qquad y=\sqrt{\frac{c^2/c_2^2+\tau_2-\tau_1}{1+\tau_2}}$$
$$c_2=\sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \tau_1=\frac{S_{11}^0}{G} \quad \tau_2=\frac{S_{22}^0}{G} \tag{21}$$

那末

$$c=c_2\sqrt{y^2\tau_1-(1-y^2)\tau_2} \tag{22}$$

方程(20)可以写成如下简洁的形式

$$y^6-8\left(1-\frac{\beta}{2}\right)y^4+8\left[3(1-\beta)+\frac{1}{2}\beta^2-(1-\beta)^2\frac{1-2\upsilon}{5-\upsilon-\beta}\right]y^2-16(1-\beta)\left[1-(1-\beta)\frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)-2\beta}\right]=0 \tag{23}$$

式中

$$\beta=\frac{S_{22}^0}{2(G+S_{22}^0)}=\frac{\tau_2}{2(1+\tau_2)} \tag{24}$$

式(21)~(24)便是计算 C 的系列公式。与之相应,式(16)表示的非负实数 α_1、α_2 分别为

$$\frac{\alpha_1}{s}=\sqrt{\frac{1-\left[\left(\frac{c^2}{c_2^2}\right)+\tau_2-\tau_1\right]}{\frac{2(1-\upsilon)}{1-2\upsilon}+\tau_2}} \tag{25a}$$

$$\frac{\alpha_2}{s}=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{c^2}{c_2^2}+\tau_2-\tau_1\right)}{1+\tau_2}} \tag{25b}$$

如果存在满足(22)、(23)的正实数 C,又使

$$1-\frac{\frac{c^2}{c_2^2}+\tau_2-\tau_1}{\frac{2(1-\upsilon)}{1-2\upsilon}+\tau_2}\geqslant 0$$

$$1-\frac{\frac{c^2}{c_2^2}+\tau_2-\tau_1}{1+\tau^2}\geqslant 0 \tag{26}$$

那么式(18)便为半空间 $x_2\geqslant 0$ 上的 Rayleigh 波。

3 初应力分量对 Rayleigh 波速的影响

如果坐标轴方向 ox_1、ox_2、ox_3 分别与应力 3 个主方向一致,对于 Hooke 介质,可以从式(22)和(23)得出初应力对 Rayleigh 波速影响规律的如下结论:

1) 如果 $S_{22}^0=0$,式(23)的(22)成为

$$y^6-8y^4+8\left(3-\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\right)y^2-16\left(1-\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\right)=0 \tag{27}$$

$$\frac{c^{(1)^2}}{c_2^2}=y_0^2+\frac{S_{11}^0}{G} \tag{28}$$

式中 y_0 为方程(27)的非负实根,$c_2=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$。如果用 c_0 表示无初应力 Hooke 介质 Rayleigh 波速,那么式(28)成为

$$c^{(1)^2}=c_0^2+\frac{S_{11}^0}{G}C_2^2$$

只要满足 $S_{11}^0>-\frac{Gc_0^2}{c_2^2}$,Rayleigh 波总存在,并且受拉正应力($S_{11}^0>0$)提高波速,受压正应力减小波速。

2) 如果 $S_{11}^0=0$,式(22)成为

$$\frac{c^{(2)^2}}{c_2^2}=y_2^2-(1-y_2^2)\frac{S_{22}^0}{G}=y_2^2\left(1+\frac{S_{22}^0}{G}\right)-\frac{S_{22}^0}{G}$$

方程(23)形式不变,它的非负实根为 y_2。因为 $c^{(2)}>0$,因此

$$y_2^2>\frac{\frac{S_{22}^0}{G}}{1+\frac{S_{22}^0}{G}}$$

方程(23)存在非负实根的充分条件是左端第 4 项非

正，这个条件可写作

$$y_2^2 > \frac{\frac{S_{22}^0}{G}}{1+\frac{S_{22}^0}{G}} < \frac{2}{1+2\upsilon}$$

3) 如果 $S_{11}^0 = S_{22}^0 = S_0$，式(22) 成为

$$\frac{C^{(3)^2}}{C_2^2} = y_3^2\left(1+\frac{S_0}{G}\right)$$

方程(23) 不变，y_3 为其非负实根。$C^{(3)} > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ 和 y_3 的非负条件要求

$$\frac{\frac{S_{22}^0}{G}}{1+\frac{S_{22}^0}{G}} < \frac{2}{1+2\upsilon} \quad 和 \quad \frac{S_0}{G} > -1$$

通常总可以得到满足。

如果第(2) 与第(3) 两种情况下 $S_{22}^0 = S_0$，那末方程(23) 的根相同 $y_2 = y_3$，因此两种情况的波速有关系(表 1)。

$$\frac{C^{(2)^2}}{C_2^2} = \frac{C^{(3)^2}}{C_2^2} - \frac{S_0}{G}$$

表 1　S_0、S_{22} 与波速的关系　　$\upsilon = 0.25$

S_0/G、S_{22}^0/G	-0.10	-0.05	0.00	0.05	0.10
$C^{(3)}/C_2$	0.864	0.892	0.919	0.946	0.972
$C^{(2)}/C_2$	0.964	0.942	0.919	0.896	0.872

参考文献：

[1] PRAGER W. The General Variational Principle of theTheory ofStructural Stability[J] Quart Appl Math, 1946, 4: 378-384.

[2] HILL R. On Uniquencess and Stability in the Theory of finite Elastic Stability[J]. J Mech Phys Solids, 1957, 5: 229-241.

[3] TRUESDELL C, NOLL W. The Nonlinear Field Theory of Mechanics, Handbuch der Physics[M]. 111/3. Spinger-Verlag, Berlin and Ne York, 1965.

[4] HAYER M, RIVLIN R S. Propagation of a Plan Waves in an Isotropic Elastic Material Subjected to Pure Homogeneous Deformation[J] Arch Rational annl, 1961, 8: 15-22.

[5] HAYER M, RIVLIN R S. Surface Waves in Deformed Elastic Material[J]. Arch Rational Annl, 1961, 8: 358-380

[6] ERINGEN A C, SUHUBI E S. Elastodynamics[M] Acad Press New York and London, 1974.

[7] JASSBY K, SALTOUN D Use of Ultrasonic Rayleigh Waves for the Measurement of Applied Biaxial Surface Stresses in Aluminum 2024-T351 Alloy[J]. Materials Evaluation, 1982, 40: 198-205.

[8] 叶明亮，邹义怀．原岩应力超声波检测及应力场分析[J]. 岩土工程学报，1998, 20: 31-36.

[9] 匡震帮．非线性连续介质力学基础[M]. 西安：西安交通大学出版社，1989.

Rayleigh Waves in Initial Stress Field

ZHANG Pei-yuan[1], *LU Xiao-xia*[1], *YAN Bo*[1], *WANG Tian-gen*[2]

(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. Mechanical Engineering Defartment, Xinan Petroleum University, Nanchong 637000, China)

Abstract: A calculation of velocity of Rayleigh wave in initial stress field is researched in present paper. Under this circumstances the Rayleigh wave propagation is a motion of small deformation superposed on a pre-stressed configuration. Because of effect of initial stresses the formula for calculating the Rayleigh wave velocity is complicated. Amending the elastic modulus of the media by use of initial stresses the equation of the Rayleigh wave velocity can be transformed into a simple algebra equation of degree, in which terms of degree 5, degree 3, degree 1 are vanished. This equation similar to that is in no pre-stressed madia is solved easily. The numerical result shows how Rayleigh were is evidently affected by pre-stresses.

Key words: elastic wave; initial stres; rayleigh wave

（责任编辑　钟学恒）