

文章编号: 1000-582x(2000)05-0082-05

# 人胫骨端松质骨撞击动力响应数值分析

李德源, 姚国文, 刘占芳, 张湘伟 R 318.01  
(重庆大学建筑工程学院, 重庆 400044)

**摘要:** 基于对松质骨结构特征的观察, 应用建立在连续介质力学框架内的混合物理论基础上的两相多孔介质模型来描述人体胫骨端松质骨在撞击载荷作用下, 固体骨质的应力场、变形场与孔间骨髓压力分布随时间变化的规律, 研究流固之间的耦合关系。考虑固体骨质为各向同性线弹性介质, 流体为理想流体, 结合相应的初、边值条件, 建立了描述松质骨撞击动力问题的一组完整的控制方程。然后, 采用 Galerkin 加权残值法, 通过在连续方程中引入压力  $p$  与罚参数  $\beta$  之比项, 消去控制方程中的压力项, 导出了松质骨在撞击载荷作用下的动力响应的罚有限元公式。用编制的有限元程序计算了松质骨平面问题的撞击动力响应。结果表明: 由于松质骨中液体组分的扩散和流动, 引起固体骨质和液态骨髓间的相互作用, 使得松质骨呈现着一种强烈的表现粘弹性行为以及能量耗散性质。

**关键词:** 松质骨; 撞击动力响应; 加权残值法

**中图分类号:** R 318.01

**文献标识码:** A

人胫骨 数值分析

在交通事故等各类突发事件中, 人体经常遭受撞击载荷的作用, 引起骨骼的损伤。位于膝关节下的胫骨是经常发生撞击伤的部位。研究人胫骨在撞击载荷作用下的动力响应, 可以对损伤机理, 骨折损伤愈合、设计各类医疗器械及保护器械提供分析设计基础。

胫骨是一种长的管形骨, 它的端部粗大, 主要由高孔隙率的松质骨组成。近年来, 由于与年龄相关的骨折、假肢松弛, 以及骨重建等科学和临床问题的推动, 松质骨力学特性的实验研究和理论分析已成为骨力学的研究焦点之一<sup>[1]</sup>。作者研究的胫骨端松质骨在撞击载荷作用下的动力响应。

松质骨的结构特征近似于一种蜂窝状的多孔固体材料, 孔穴内充满着骨髓<sup>[2]</sup>。Linde 等<sup>[3]</sup>指出, 松质骨的力学性质如模量和强度都强烈地依赖于骨质的表现密度, 表现密度  $\rho^0$  是指构成骨的组分的材料密度(组织密度)  $\rho_i^0$  与该组分在骨试件中所占的百分比即体积分数  $\varphi_i^0$  的乘积(这里上标  $\alpha = s, f$  分别代表固体骨质和孔穴中的液体组分), 即:

$$\rho^0 = \varphi_i^0 \rho_i^0 \quad \alpha = s, f \quad (1)$$

其中固体骨质的体积分数的变化范围可从低密度松质骨的 0.05 到高密度松质骨的 0.60, 而人类松质骨(湿)的组织密度变化范围相当小, 大约为  $1.6 \sim 2.0 \text{ g/cm}^3$ , 但是其表现密度则变化较大, 典型的变化范围为  $0.05 \sim 0.10 \text{ g/cm}^3$ 。

松质骨结构特征的描述十分复杂。要对松质骨进行变形场、液体流场及压力场、应力场进行了分析, 除用光弹性等实验方法外, 数值分析方法中的有限元法无疑是最有效的方法之一。吴文周等<sup>[4]</sup>将膝关节简化成平面问题, 用有限元法分析了人膝关节在自重作用下的应力场, 他忽略了关节软骨和松质骨中的液体组分, 将关节软骨和松质骨简单处理为由“一种弹性材料”组成, 只是 3 种材料力学性质不同, 所以其结果不能反映骨的粘弹性和渗流行为。Mow 等人<sup>[5]</sup>基于混合物理论上建立的多孔介质模型, 对关节软骨的变形场和应力场进行了分析和描述。作者的目的在于从固-流两相多孔介质理论出发, 引入描述松质骨的力学模型, 在此基础上, 数值分析松质骨在撞击载荷作用下的动力响应, 为探讨撞伤的发生机制及其防护提

收稿日期: 1999-12-06

基金项目: 重庆市科委院士基金资助项目[重科委 98(19)号]

作者简介: 李德源(1965-), 男, 四川隆昌人, 重庆大学固体力学专业博士。研究方向为生物力学。

重庆大学机械传动国家重点实验室研究人员。

供基础性的设计。作者所考察的问题限定为多孔固体骨质为线弹性变形,孔隙间流动的骨髓为非粘性液体,并且将松质骨视为一种均匀的各向同性的液饱和多孔材料。

## 1 松质骨的两相多孔弹性模型

松质骨是由多孔固体骨架和孔间骨髓(液体)构成的两相多孔材料,基于现代多孔介质理论<sup>[5,6]</sup>,排除组分间的质量交换,假定多孔固体骨质和孔穴内的液体这两种组分的材料密度保持不变。若考察的材料限定在小变形和等温范围内,忽略外部体积力,场方程可写成如下形式:

$$\nabla \cdot (\varphi^s \dot{u}^s + \varphi^f \dot{u}^f) = 0 \quad (2)$$

$$\rho^s \ddot{u}^s = \nabla \cdot \mathbf{T}_e^s - \varphi^s \nabla p + a_v (\dot{u}^f - \dot{u}^s) \quad (3)$$

$$\rho^f \ddot{u}^f = -\varphi^f \nabla p - a_v (\dot{u}^f - \dot{u}^s) \quad (4)$$

扩散动量交换方程为:

$$\dot{p}_c^f = -a_v (\dot{u}^f - \dot{u}^s) \quad (5)$$

本构方程则为:

$$\mathbf{T}_e^s = \mathbf{T}^s : \mathbf{E}^s$$

$$\mathbf{E}^s = \frac{1}{2} (\text{grad} u^s + \text{grad}^T u^s) \quad (6)$$

上式中  $\dot{u}^s$ 、 $\dot{u}^f$  和  $\ddot{u}^s$ 、 $\ddot{u}^f$  分别描述多孔固体骨质和孔间液体的速度和加速度,而  $u^s$  和  $u^f$  分别表示多孔固体骨质和孔间液体的位移。 $\rho^a$  ( $a = s, f$ ) 为表观密度,  $\varphi^a$  为体积分数(满足饱和约束条件:  $\varphi^f + \varphi^s = 1$ ),  $\mathbf{T}_e^s$  为多孔固体骨质的有效应力,  $D^s$  为空的多孔固体骨质的弹性常数,  $\mathbf{E}^s$  是线性化的拉格朗日应变张量。 $\dot{p}_c^f$  表达了固-液两相间流动的摩擦阻力,称为扩散阻力,系数  $a_v$  为扩散阻力系数,  $a_v = (\varphi^f)^2 \gamma_l^f / k$ ,  $k$  是多孔材料的水力渗透系数,  $\gamma_l^f$  是孔穴中液体的比重,问题的边界条件为:

$$u^s = \hat{u}^s \quad \text{on } \Gamma_u^s \quad (7a)$$

$$\dot{u}^f = \dot{u}^f \quad \text{on } \Gamma_u^f \quad (7b)$$

$$t^s = \hat{t}^s \quad \text{on } \Gamma_t^s \quad (7c)$$

$$t^f = \varphi^f p n = \varphi^f \hat{p} n \quad \text{on } \Gamma_t^f \quad (7d)$$

而问题的初值条件为:

$$u^s(0) = u_0^s \quad u^f(0) = u_0^f \quad (8a)$$

$$\dot{u}^s(0) = \dot{u}_0^s \quad \dot{u}^f(0) = \dot{u}_0^f \quad (8b)$$

$$\ddot{u}^s(0) = \ddot{u}_0^s \quad \ddot{u}^f(0) = \ddot{u}_0^f \quad (8c)$$

场方程(2~6)和边界条件(7)及初始条件(8)即构成了描述松质骨撞击动力问题的一组完整的控制方程,数值法求解这组方程,就可获得相应的动力响应。

## 2 罚有限元的弱形式

对上述初、边值问题采用 Galerkin 加权残值法推导出有限元平衡方程,为此,在连续平衡方程(2)中引入一罚参数  $\beta$ ,使其成为:

$$\nabla \cdot (\varphi^s \dot{u}^s + \varphi^f \dot{u}^f) + p/\beta = 0 \quad (9)$$

当  $\beta \rightarrow \infty$  时,方程(9)与(2)等价,由方程(9)有:

$$p = -\beta \nabla \cdot (\varphi^s \dot{u}^s + \varphi^f \dot{u}^f) \quad (10)$$

将其代入(3)、(4)式,可消去压力  $p$  项。设边界条件(7a)和(7b)为强制满足的边界条件,(7c)和(7d)为自然边界条件,假设  $\mathbf{W}^s, \bar{\mathbf{W}}^s, \mathbf{W}^f, \bar{\mathbf{W}}^f$ , 分别为多孔固体骨质和孔间液体的运动方程和自然边界条件的权函数,则相应的加权残值表达式为:

$$\int_v \mathbf{W}^s \cdot [\nabla \cdot \mathbf{T}^s + a_v (\dot{u}^f - \dot{u}^s) - \rho^s \ddot{u}^s] dv + \int_{\Gamma_t^s} \bar{\mathbf{W}}^s \cdot (\hat{t}^s - t^s) d\Gamma + \int_v \mathbf{W}^f \cdot [\nabla \cdot \mathbf{T}^f - a_v (\dot{u}^f - \dot{u}^s) - \rho^f \ddot{u}^f] dv + \int_{\Gamma_t^f} \bar{\mathbf{W}}^f \cdot \varphi^f (\hat{p} - p) n d\Gamma = 0 \quad (11)$$

由于位移和速度边界条件为强制满足的边界条件,故可以在  $\Gamma_u^s$  上使权函数  $\mathbf{W}^s = 0$ , 在  $\Gamma_u^f$  上使  $\mathbf{W}^f = 0$ , 并令:  $\bar{\mathbf{W}}^s = \mathbf{W}^s, \bar{\mathbf{W}}^f = \mathbf{W}^f$  将上述条件代入方程(11),利用 Gauss 定理,可得:

$$\int_v (\nabla \cdot \mathbf{W}^s) : [\mathbf{T}_e^s + \varphi^s \beta \nabla \cdot (\varphi^s \dot{u}^s + \varphi^f \dot{u}^f) \mathbf{I}] dv - \int_v \mathbf{W}^s \cdot a_v (\dot{u}^f - \dot{u}^s) dv + \int_v \mathbf{W}^s \cdot \rho^s \ddot{u}^s dv + \int_v (\nabla \cdot \mathbf{W}^f) : [\varphi^f \beta \nabla \cdot (\varphi^s \dot{u}^s + \varphi^f \dot{u}^f) \mathbf{I}] dv + \int_v \mathbf{W}^f \cdot a_v (\dot{u}^f - \dot{u}^s) dv + \int_v \mathbf{W}^f \cdot \rho^f \ddot{u}^f dv = \int_{\Gamma_t^s} \mathbf{W}^s \cdot \hat{t}^s d\Gamma + \int_{\Gamma_t^f} \mathbf{W}^f \cdot \varphi^f \hat{p} n d\Gamma \quad (12)$$

此即(11)式的弱形式,是有限元分析的基本方程。对整个积分区间进行离散,则在每一个单元上均应满足方程(12)。对多孔固体骨质及孔间液体的位移、速度和加速度进行插值,并用矩阵表达为:

$$\{u^s\} = [\mathbf{N}] \{u_n^s\}; \{\dot{u}^s\} = [\mathbf{N}] \{\dot{u}_n^s\}; \{\ddot{u}^s\} = [\mathbf{N}] \{\ddot{u}_n^s\}$$

$$\{u^f\} = [\mathbf{N}] \{u_n^f\}; \{\dot{u}^f\} = [\mathbf{N}] \{\dot{u}_n^f\}; \{\ddot{u}^f\} = [\mathbf{N}] \{\ddot{u}_n^f\} \quad (13)$$

式中下标为  $n$  的量代表单元  $n$  的节点上的相应物理量。采用 Galerkin 法,取  $\{\mathbf{W}^s\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{W}_n^s\}, \{\mathbf{W}^f\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{W}_n^f\}, \{\mathbf{W}_n^s\}$  和  $\{\mathbf{W}_n^f\}$  为单元  $n$  的任意系数。由符

号“ $\nabla$ ”的意义,可将其表达为矩阵形式:  $[\nabla] = [\partial/\partial x \quad \partial/\partial y]$ 。将以上关系代入(12)中。最后,由权函数  $\{W_n^i\}$  和  $\{W_n^j\}$  的任意性,得单元平衡方程组:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_n^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_n^i \\ \ddot{\mathbf{u}}_n^j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & -\mathbf{A}_n \\ -\mathbf{A}_n & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} (\varphi^i)^2 \mathbf{C}_n & \varphi^i \varphi^j \mathbf{C}_n \\ (\varphi^j)^2 \mathbf{C}_n & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_n^i \\ \dot{\mathbf{u}}_n^j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^i \\ \mathbf{u}_n^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_n^i \\ \mathbf{f}_n^j \end{Bmatrix} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_n^i] &= \int_{v_n} \rho^i [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dv \\ [\mathbf{M}_n^j] &= \int_{v_n} \rho^j [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dv \\ [\mathbf{A}_n] &= \int_{v_n} \alpha^i [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dv \\ [\mathbf{K}_n] &= \int_{v_n} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}^i] [\mathbf{B}] dv \\ [\mathbf{C}_n] &= \int_{v_n} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}_1] [\mathbf{B}] dv \\ [\mathbf{f}_n^i] &= \int_{\Gamma_f^i} [\mathbf{N}]^T [\hat{p}] d\Gamma \\ [\mathbf{f}_n^j] &= \int_{\Gamma_f^j} [\mathbf{N}]^T \varphi^j \hat{p} \mathbf{n} d\Gamma \\ [\mathbf{D}_1] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

方程(14)对积分区域中所有单元求和,得系统方程:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (16)$$

式中,  $[\mathbf{M}]$ 、 $[\mathbf{C}]$ 、 $[\mathbf{K}]$  和  $\{\mathbf{f}\}$  为相应单元矩阵和向量的组集。方程(16)即为松质骨动力响应的有限公式。

系统方程(16)的求解,时间积分采用 Newmark 隐式积分方法。当积分参数  $\delta \geq 1/2$ ,  $\alpha \geq \delta/2$  时,此方法是无条件稳定的。为最大限度地抑制高频数值,Prevost<sup>[7]</sup> 间建议积分参数的选取应满足:  $\alpha = \frac{1}{4}(\delta + 1/2)^2$ 。

孔间液体压力  $p$  可按下列方法计算得到,由(10)式有:

$$p = -\beta[\nabla](\varphi^i[\mathbf{N}]\{\dot{\mathbf{u}}_n^i\} + \varphi^j[\mathbf{N}]\{\dot{\mathbf{u}}_n^j\}) - \beta[\mathbf{L}][\mathbf{B}](\varphi^i\{\dot{\mathbf{u}}_n^i\} + \varphi^j\{\dot{\mathbf{u}}_n^j\}) \quad (17)$$

式中,  $[\mathbf{L}]$  和  $[\mathbf{B}]$  矩阵如前面所定义。

### 3 松质骨撞击动力响应数值分析结果

根据以上方法,编制了二维有限元程序。程序中方程系数矩阵采用变带宽一维存储,因而可用于较大规模实际问题的分析。程序包括隐式和显式两种时间积分方案

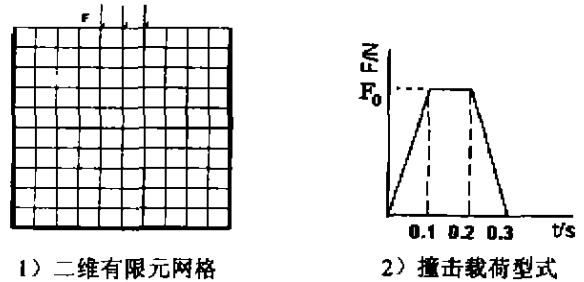


图1 松质骨撞击动力问题

图1表示了所计算的二维问题的有限元网格,包括121个结点,100个单元,面积为  $0.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$ 。左、右及底边水平位移,底边竖直位移被约束。撞击载荷作用在上边中间,  $F_0 = 2.0 \times 10^3 \text{ N}$ , 型式如图1所示。松质骨的物理参数取为:  $E = 2.5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu = 0.30$ ,  $\varphi^i = 0.40$ ,  $\varphi^j = 0.60$ ,  $\rho^i = 2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho^j = 930 \text{ kg/m}^3$ ,  $k = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ , 取  $\Delta t = 0.002 \text{ s}$ ,  $\delta = 0.60$ ,  $\alpha = 0.3025$ 。罚参数  $\beta$  取  $10^{11} \rightarrow 10^{13}$  均不影响计算结果。图2~5中表示了多孔固体骨质的变形、应力,孔间液体的流动及压力随时间变化的关系

图3是松质骨在不同时刻的多孔固体骨质的变形,显示了变形响应强烈地依赖于时间的特性。作用在松质骨的载荷持续时间为  $0.3 \text{ s}$ ,但位移响应表现了一定的滞后。图4是松质骨在不同时刻固体骨架的应力等高线,表明在撞击载荷作用下,松质骨也强烈地呈现了一种粘弹性行为:即离撞击面愈近,应力响应愈快地消失,而在离撞击面较远处,应力响应表现了更强烈地对撞击载荷的滞后效应,但是,应力响应的强度相对要弱一些。图5是松质骨在不同时刻孔隙中液体的压力等高线。显然,骨组织中的孔间液体在撞击过程中的响应起着关键性的作用。即使在没有除自身载荷以外的附加载荷作用时,多孔固体骨质中的液体组分之大部分仍可自由扩散。当松质骨受载荷冲击时,多孔固体骨质受到压缩,孔间液体从骨质的孔穴中流出,骨质的应力和位移缓慢增大,骨髓中的压力也相应增大;

当外载消失, 固体骨质由于回弹, 孔间液体重新流回多孔固体骨质的孔穴中, 固体骨质的应力和位移缓慢回落, 并且骨髓的压力也因此出现负值(见图 2 中各时刻孔间液体的流向与图 5 中各时刻的压力的对应)。另

一方面, 固体骨架中孔间流体的流动必然产生一定的摩擦阻力, 从而造成能量耗散, 同时也对松质骨的表现粘弹性行为产生影响。因此, 松质骨中的流动机制是松质骨的表现粘弹性和能量耗散现象的根本原因。

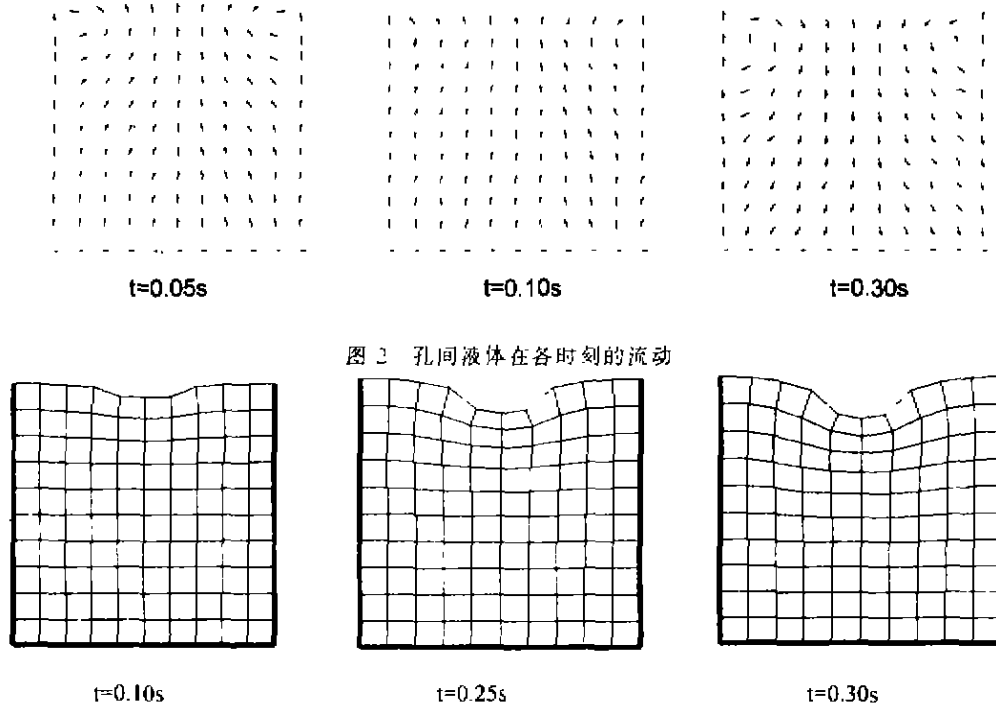


图 3 多孔固体骨质在各时刻的变形(放大 100 倍)

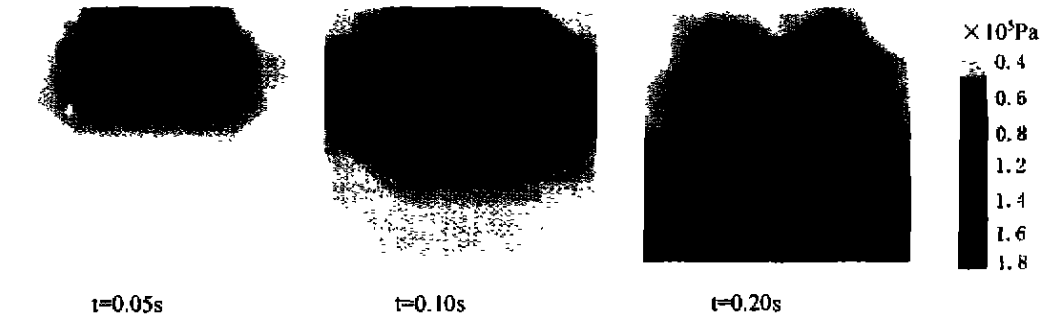


图 4 多孔固体骨质在各时刻的等效应力场

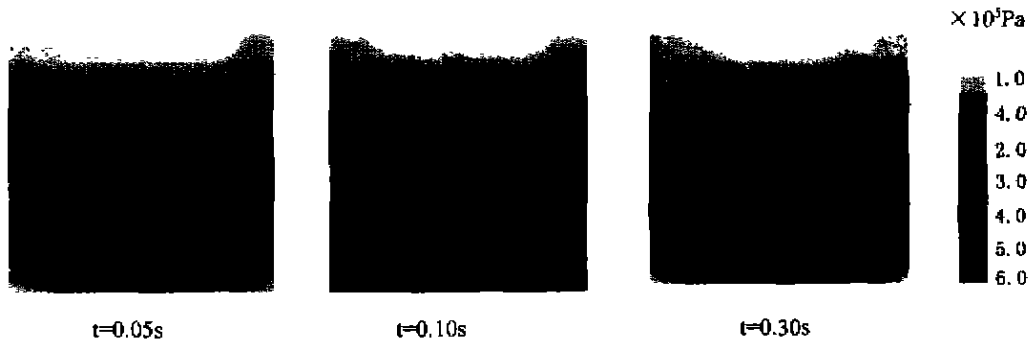


图 5 孔间液体在各时刻压力场

## 5 结论

作者引入了描述松质骨的固-流两相多孔弹性模型,用罚方法导出了液饱和多孔介质动力问题的有限元方程。应用上述方法和有限元程序,可以对松质骨的一般静力和动力问题进行数值计算,文中分析了人股骨端松质骨在撞击载荷作用下的动力响应。由于很难取得准确形状和尺寸的松质骨试样,松质骨的实验研究远不如密质骨,计算所需的物理参数很不全面,作者对松质骨的一些物理参数如孔隙率、渗透系数、表观密度等进行了测试,作了胫骨3点弯曲撞击响应实验研究工作,这些工作将另文讨论。

### 参考文献:

- [1] KING A I. Progress of research on impact biomechanics[J]. J Biomech Engng, 1993, 115: 582 ~ 587.
- [2] KEAVENY T M, HAYES W C. A 20-year perspective on the mechanical properties of trabecular bone[J]. J Biomech Engng, 1993, 115: 534 ~ 542.
- [3] LINDE F, NORGAARD I, HVID A, et al. Mechanical properties of trabecular bone depend on strain rate[J]. J Biomechanics, 1991, 3: 296 ~ 301.
- [4] 吴文周, 孙珏. 人体膝关节应力场[J]. 固体力学学报, 1991, 3: 296 ~ 301.
- [5] MOU V C, KUEI S C, LAI W M, et al. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiments[J]. J Biomech Engng, 1980, 102: 73 ~ 84.
- [6] BOWEN R M. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures[J]. Int J Engng Sci, 1980, 18: 1129 ~ 1148.
- [7] PREVOST J H. Wave propagation in fluid-saturated porous media: an efficient finite element procedure[J]. Soil Dynamic and Earth Engng, 1985, 4: 193 ~ 202.

## Numerical Analysis of Impact Response of Cancellous Bone in Human Tibia

LI De-yuan, YAO Guo-wen, LIU Zhan-fang, ZHANG Xiang-wei

(College of Architectural Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** Biphasic porous medium model, based on the mixture theory in continuum mechanics frame, is used to depict the distribution disciplinarian of solid phase's stress field, distortion field and fluid phase's pore pressure when the cancellous bone tissue is subjected to impact loading via experimental observations for the cancellous bone structure. The coupling relationship among the distortion and fluid flow is studied. Together with corresponding initial and boundary conditions, the solid osseous is considered as isotropic elastic medium, and the marrow in the cavity as ideal fluid, the dynamic governing equations are working out. The finite element formulation is attained for the dynamical response of cancellous bone by using Galerkin weighted residual method. Penalty finite element formulation, which is obtained via introducing ratio term of pressure  $p$  and penalty parameter  $\beta$  in the continuity equation and, in turn, the pressure in governing equations is eliminated. As a exapmle, the coupling effect between the solid phase and the fluid phase in cancellous bone is calculated about the plane problem when the tissue is subjected to impact loading. The computational results show that the reciprocity between the solid osseous and the marrow in the cavity is resulted in because of coupling effects between the solid and the fluid. The cancellous bone is provided with certain features similar to those occuring in viscoelastic solids and in energy dissipation.

**Key words:** cancellous bone; impact response; weithted residual method

(责任编辑 钟学恒)