

文章编号: 1000-582x(2000)05-0087-06

具有固支边横观各向同性叠层地基板的三维解

TU 470.3
O343.1

高荣誉

(安徽建筑工业学院 建筑工程与材料系, 合肥 230022)

摘要: 抛弃任何有关位移或应力模式的人为假定, 引入 δ -函数, 导出具有固支边横观各向同性叠层地基板在任意荷载作用下的状态方程。给出薄的、中厚的和强厚的叠层地基板的精确解。其解满足弹性力学的所有方程, 并计及每一叠层的 5 个弹性常数。可求出层间和板内任意处的位移和应力分量以及地基反力。

关键词: 强厚叠层地基板; 状态方程; 层间协调; 精确解
中图分类号: TU 313.1; TU 348; O 343.2

固支边, 横观各向同性,
三维解。
文献标识码: A

在土木工程中, 弹性地基板得到广泛的应用, 它的计算分析一直受到人们的重视。对弹性地基薄板问题, Timoshenko S.^[1], 张福范^[2] 等在其各自的专著中曾做过一系列论述。至于弹性地基厚板研究文献较少。石小平等^[3] 用迭加法解决弹性地基上四边自由矩形 Reissner 板的求解问题。王建国等^[4] 应用边界元法求解 Reissner 厚板的弯曲。近十几年来, 文献[5, 6] 对三维弹性板壳问题进行了系统的理论研究, 并证明各力学量的真解不可能是任何坐标变量的多项式。用三维弹性理论研究地基厚板是一项既有实际工程意义, 又有很高学术理论价值的课题。作者在文献[5~7] 基础上直接从三维弹性力学基本方程出发, 引入状态空间理论和 δ -函数, 对 Winkler 地基上强厚叠层板进行研究, 得出具有固支边的横观各向同性强厚叠层地基板的精确解。此解包含 3 个位移和 6 个应力分量, 可求出地基反力, 适用于任意层数和厚跨比。

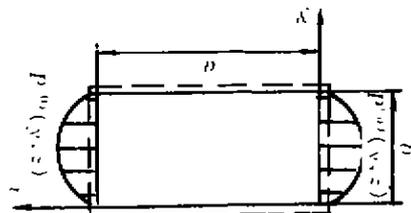


图 1 对边固支对边简支地基板

$$H(x-x_0) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = x_0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x \neq x_0 \text{ 时;} \end{cases}$$
$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty, & \text{当 } x = x_0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x \neq x_0 \text{ 时;} \end{cases} \quad x \in [0, x_0]$$

令 $\sigma_x = \sigma_x + H(x)P^{(0)}(y, z) + H(x-a)P^{(a)}(y, z)$ (1)

将(1)代入弹性力学平衡方程, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \delta(x)P^{(0)} - \delta(x-a)P^{(a)} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

与常规平衡方程相比, 上式右端项若设想为体积力, 则对应 x 方向的正应力场为 σ_x 。

1 对边固支对边简支地基板的状态方程

图 1 为一横观各向同性地基板, 取 z 轴与各向同性面垂直, 板厚为 h , $x = 0, a$ 两边固支, $y = 0, b$ 两边简支, 在板顶面受横向压力 $q(x, y)$ 作用, 将固支边变为简支边, 则固支反力为 $P^{(0)}(y, z), P^{(a)}(y, z)$ 。为了建立状态方程引入单位脉冲函数 $H(x)$ 和 Dirac 函数即 δ -函数。

· 收稿日期: 2000-05-17

基金项目: 安徽省教委自然科学基金资助项目(97JL012)

作者简介: 高荣誉(1964-), 男, 安徽宿松人, 副教授, 硕士。主要从事地基板、结构工程方面的研究。

将几何方程代入横观各向同性体应力-应变关系,有

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ -(C_2\alpha^2 + C_6\beta^2) & -(C_3 + C_6)\alpha\beta & C_1\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -(C_3 + C_6)\alpha\beta & -(C_2\beta^2 + C_6\alpha^2) & C_1\beta & 0 & 0 & 0 \\ C_1\alpha & C_1\beta & C_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

被消去的平面应力可由下式表示

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2\alpha & C_3\beta & -C_1 \\ C_3\alpha & C_2\beta & -C_1 \\ C_6\beta & C_6\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ Z \end{Bmatrix} \quad (7)$$

将 δ -函数和固端反力展成级数函数,有

$$\left. \begin{aligned} \delta(x)P^{(0)} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi x}{a} \right) \\ \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(0)}(z) \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \delta(x-a)P^{(a)} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos \frac{m\pi x}{a} \right) \\ \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(a)}(z) \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

取位移和应力场函数为

式中 U, V, W 分别为地基板沿 x, y, z 方向的位移, $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$.

记 $X = \tau_{xz}, Y = \tau_{yz}, Z = \sigma_z, \alpha = \frac{\partial}{\partial x}, \beta = \frac{\partial}{\partial y}$, $C_1 = -\frac{C_{13}}{C_{33}}, C_2 = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, C_3 = C_{12} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, C_4 = \frac{1}{C_{33}}, C_5 = \frac{1}{C_{44}}, C_6 = C_{66}$, 从(2)、(3)两式消去 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 后有,

$$\frac{\partial}{\partial z} [U \ V \ Z \ X \ Y \ W]^T = \bar{D} [U \ V \ Z \ X \ Y \ W]^T + B \quad (4)$$

式中

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ [P^{(0)}\delta(x) - P^{(a)}\delta(x-a)] \ 0 \ 0]^T \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{Bmatrix} U_{mn}(z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ V_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ W_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{Bmatrix} \quad (9a)$$

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{Bmatrix} X_{mn}(z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ Y_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ Z_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{Bmatrix} \quad (9b)$$

把(8)、(9)式代入(4)式,对每对 $m-n$ 有

$$\frac{d}{dz} \mathbf{R}(z) = \mathbf{DR}(z) + \mathbf{B}(z) \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{R}(z) = [U_{mn}(z) \ V_{mn}(z) \ Z_{mn}(z) \ X_{mn}(z) \ Y_{mn}(z) \ W_{mn}(z)]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{B}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1 + \text{SGN}(m)}{a} \\ [P_n^{(0)}(z) - (-1)^m P_n^{(a)}(z)] & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & -\eta \\ 0 & 0 & 0 & \zeta & \eta & 0 \\ C_2\zeta^2 + C_6\eta^2 & (C_3 + C_6)\zeta\eta & C_1\zeta & 0 & 0 & 0 \\ (C_3 + C_6)\zeta\eta & C_6\zeta^2 + C_2\eta^2 & C_1\eta & 0 & 0 & 0 \\ -C_1\zeta & -C_1\eta & C_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$\zeta = m\pi/a, \eta = n\pi/b, \text{SGN}(m)$ —符号函数, 方程 (10) 称常系数非齐次状态方程。

2 叠层地基板的状态方程及其解

图 2(a) 所示一具有 s 层横观各向同性叠层地基板, 取 z 轴与各向同性面垂直, $x=0, a$ 两边固支, $y=0, b$ 两边简支, 图 2(b) 处于局部坐标系中第 j 层放大图。为了便于计算出固支反力, 把第 j 层等分 k_j 个薄层, 薄层厚度 $d_j = h_j/k_j, (j=1, 2, \dots, s)$ 。图 2(c) 是

第 j 层第一个薄层, 作用在该薄层固支反力为 $P_{j1}^{(0)}(y, z), P_{j1}^{(a)}(y, z)$, k_j 的取值视板厚及精度要求而定, 只要薄层充分薄, 有理由认为 $P_{j1}^{(0)}(z), P_{j1}^{(a)}(z)$ 在薄层内是线性分布的, 即有

$$\left. \begin{aligned} P_{j1}^{(0)}(z) &= A_{j1}^{(0)} + \frac{A_{j1}^{(0)} - A_{j1}^{(a)}}{d_j} z, & z \in [0, d_j] \\ P_{j1}^{(a)}(z) &= A_{j1}^{(a)} + \frac{A_{j1}^{(a)} - A_{j1}^{(0)}}{d_j} z, & z \in [0, d_j] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

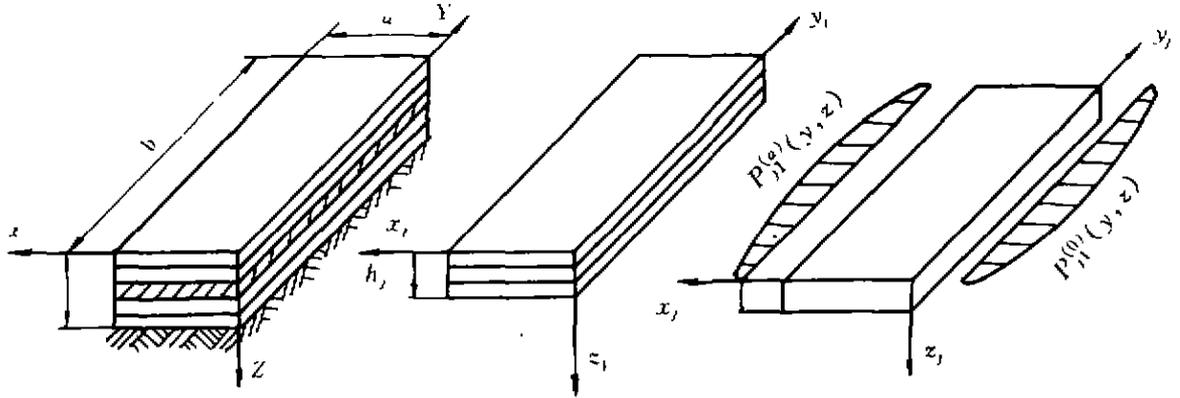


图 2 对边固支对边简支叠层地基板

现对第 j 层的第一个薄层建立其状态方程。由状态方程 (10) 可写出第 j 层中第 j_1 薄层状态方程, 有

$$\frac{d}{dz} R_{j1}(z) = D_j R_{j1}(z) + B_{j1}(z) \quad (15)$$

根据状态空间理论, 方程 (15) 的解为

$$R_{j1}(z) = G_j(z) R_{j1}(0) + C_{j1}(z), \quad z \in [0, d_j] \quad (16)$$

式中

$$G_j(z) = e^{D_j z}, C_{j1}(z) = \int_0^z e^{D_j(z-\tau)} B_{j1}(\tau) d\tau \quad (17)$$

计算 $G_j(z)$, 需研究矩阵 D_j 的特征值。设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ 为 D_j 的特征值, 由矩阵理论知, 必存在一个由相应的特征向量组成的矩阵 $P_j = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_6]$, 及其逆阵 P_j^{-1} , 使 D_j 变换成对角线标准形, 且有

$$G_j(z) = e^{D_j z} = P_j \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 z} & & & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 z} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & & & e^{\lambda_6 z} \end{bmatrix} P_j^{-1} \quad (18)$$

$$C_{j1}(z) = \int_0^z P_j \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(z-\tau)} & & & & 0 \\ & e^{\lambda_2(z-\tau)} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & e^{\lambda_6(z-\tau)} \end{bmatrix} P_j^{-1} B_{j1}(\tau) d\tau \quad (19)$$

在 (16) 式中令 $z = d_j$, 有

$$R_{j1}(d_j) = G_j(d_j) R_{j1}(0) + C_{j1}(d_j) \quad (20)$$

对第二薄层进行类似的推导, 可得

$$R_{j2}(d_j) = G_j(d_j) R_{j2}(0) + C_{j2}(d_j) \quad (21)$$

上两式中 $R_{j1}(d_j)$ 和 $R_{j2}(0)$ 分别是第 j 层中第一薄层下表面和第二个薄层上表面物理量, 此二组变量应相等, 于是有

$$R_{j2}(d_j) = [G_j(d_j)]^2 R_{j1}(0) + G_j(d_j) C_{j1}(d_j) + C_{j2}(d_j)$$

依次类推, 最后可把第 k_j 个薄层下表面物理量和第一

个薄层上表面物理量联系起来:

$$R_{jk}(d_j) = E_{jk} R_{j1}(0) + \bar{E}_{jk} \quad (22)$$

式中 $E_{jk} = [G_j(d_j)]^k \quad (23)$

$$\bar{E}_{jk} = [G_j(d_j)]^{k-1} C_{j1}(d_j) + [G_j(d_j)]^{k-2} C_{j2}(d_j) + \dots + G_j(d_j) C_{j,k-j}(d_j) + C_{jk}(d_j) \quad (24)$$

(22)式对图2(a)中任一层都成立,根据层间位移和应力的连续条件相等,最后可把整个叠层地基板上、下表面物理量联系起来

$$R_{jk}(d_j) = \Pi R_{11}(0) + \bar{\Pi} \quad (25)$$

式中 $\Pi = \prod_{j=1}^l E_{jk} \quad (26)$

$$\bar{\Pi} = E_{s k_1} (E_{s-1, k_1} \dots E_{2 k_2} \bar{E}_{1 k_1} + E_{s-1, k_1} \dots E_{5 k_5} \bar{E}_{2 k_2} + \dots + \bar{E}_{s-1, k_1}) + \bar{E}_{s k_1} \quad (27)$$

上面 $R_{11}(0)$ 称为初始值。 Π 是 6×6 阶常数矩阵, $\bar{\Pi}$ 是6阶列阵,含有特定系数 $A_{nk}^{(0)}, A_{jk}^{(a)}$, ($k=1, 2, \dots, k_j$)。按Winker地基模型,地基反力 P 为

$$P = -KW = -\sum_m \sum_n KW_{mn}(h) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (28)$$

K 为地基基床系数。当地基板上表面作用均布法向压力 q 时,并把 q 按(9b)中 Z 级数形式展开,则地基板上、下表面的外力分量为(当 q 为其它形式荷载时,同样可按级数形式展开)

$$\left. \begin{aligned} X_{mn}(0) = 0, Y_{mn}(0) = 0, Z_{mn}(0) &= -\frac{16q}{mn\pi^2} \\ X_{mn}(h) = 0, Y_{mn}(h) = 0, Z_{mn}(h) &= -KW_{mn}(h) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

将(29)代入(25)式,并取第3、4、5、6个方程,可求得

$$\left\{ \begin{aligned} U_{mn}(0) \\ V_{mn}(0) \\ W_{mn}(0) \end{aligned} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \bar{\Pi}_{31} + K\bar{\Pi}_{61} & \bar{\Pi}_{32} + K\bar{\Pi}_{62} & \bar{\Pi}_{36} + K\bar{\Pi}_{66} \\ \bar{\Pi}_{41} & \bar{\Pi}_{42} & \bar{\Pi}_{46} \\ \bar{\Pi}_{51} & \bar{\Pi}_{52} & \bar{\Pi}_{56} \end{array} \right]^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{16q}{mn\pi^2} \left[\begin{array}{l} \bar{\Pi}_{33} + K\bar{\Pi}_{63} \\ \bar{\Pi}_{43} \\ \bar{\Pi}_{53} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \bar{\Pi}_3 + K\bar{\Pi}_6 \\ \bar{\Pi}_4 \\ \bar{\Pi}_5 \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (30)$$

3 边界条件

从(9)、(7)、(1)式可以看出,在简支边 $y=0, b$ 处,边界条件 $W=U=\sigma_y=0$ 得到满足;在固支边 $x=0, a$ 处,因 $\sigma_y=0, \sigma_x$ 分别等于 $P^{(0)}$ 和 $P^{(a)}$;而 $W=V=0$ 已经满足,剩下尚需满足边界条件 $x=0, a$ 处, $U=0$,把所取 U 的三角级数表达式代入边界条件,最终有

$$\sum_m [U_{mn}(z)]_j = 0 \quad (31)$$
$$\sum_m [(-1)^m U_{mn}(z)]_j = 0$$

为了将 $U_{mn}(z)$ 表达出来,仿照(25)的推导过程,将第 j 层的第 k 个薄层物理量用初始值表示

$$R_{jk}(z) = \Pi_{jk}(z) R_{11}(0) + \bar{\Pi}_{jk}(z), (j > 1) \quad (32)$$

式中

$$\Pi_{jk}(z) = G_j(z) [G_j(d_j)]^{j-1} \Pi_{j-1}$$
$$\bar{\Pi}_{jk}(z) = G_j(z) [G_j(d_j)]^{j-1} \Pi_{j-1} + G_j(z) E_{j,k-1} + C_{jk}(z) \quad (33)$$

当地基板上表面受均布法向压力 q 作用时,取(32)式中第一行,并把(30)式代入,得

$$\left\{ \begin{array}{l} [U_{mn}(z)]_{jk} = [\Pi_{11}(z) \Pi_{12}(z) \Pi_{16}(z)]_{jk} \cdot \left[\begin{array}{ccc} \Pi_{31} + K\Pi_{61} & \Pi_{32} + K\Pi_{62} & \Pi_{36} + K\Pi_{66} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{56} \end{array} \right]^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{16q}{mn\pi^2} \left[\begin{array}{l} \Pi_{31} + K\Pi_{63} \\ \Pi_{43} \\ \Pi_{53} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \bar{\Pi}_3 + K\bar{\Pi}_6 \\ \bar{\Pi}_4 \\ \bar{\Pi}_5 \end{array} \right] \end{array} \right\} \\ \frac{16q}{mn\pi^2} [\Pi_{13}(z)]_{jk} + [\bar{\Pi}_1(z)]_{jk} \end{array} \right. \quad (34)$$

($m, n = 1, 3, 5, \dots, j = 1, 2, \dots, s, k = 1, 2, \dots, k_j$)

对每对 $m-n$,在(34)式中令 $z=0$ 和 d_j ,并将它代入(31)式中第一式,便得到关于待定常数 $A_{nk}^{(0)}$ 的方程。总共有 $(k_1 + k_2 + \dots + k_s)$ 个方程以定解同样数目的待定系数。当这些系数求出后,不难由(30)式求出 $R_{11}(0)$,由(32)求出 $R_{jk}(z)$,最后求出地基板各个力学量。注意在对称荷载作用下, $A_{nk}^{(0)} = A_{nk}^{(a)}$,故边界条件(31)式在上述求解过程中第二个方程没涉及到。对非对称荷载作用,边界条件的两个方程各自独立,必须同时用来定解 $A_{nk}^{(0)}, A_{nk}^{(a)}$ 。

4 数值结果

下面的算例,是用双精度量在微机算得的, SAP5 有限元解是在 VAX 机上完成的。表中 $I_1, I_2,$

I_3 分别表示在第一、第二、第三层沿 z 方向上被分割的薄层数。表中其它参数定义为 $U = \overline{U}_{qh}/C_{11}^{(1)}$, $V = \overline{V}_{qh}/C_{11}^{(2)}$, $W = \overline{W}_{qh}/C_{11}^{(2)}$, 其中 $C_{11}^{(i)}$ 表示第二层材料的弹性刚度系数。

表 1 不同厚跨比三层横观各向同性地基板的位移、应力和地基反力

h/a	0.4		0.6		0.8	
	$I_1 = I_3 = 3, I_2 = 10$		$I_1 = I_3 = 3, I_2 = 10$		$I_1 = I_3 = 4, I_2 = 12$	
	Present	SAP5	Present	SAP5	Present	SAP5
(x, y, z)						
\overline{W}						
$(a/2, b/2, 0)$	2.66615	2.62410	1.35815	1.35139	0.91392	0.90918
$(a/2, b/2, h)$	1.74024	1.76078	0.52127	0.49736	0.17561	0.16179
$P/q \times 10^2$						
$(a/2, b/2, h)$	-0.72680	-0.70432	-0.31276	-0.29842	-0.14049	-0.12944
$(a/2, b/5, h)$	-0.44961	-0.43106	-0.18752	-0.17755	-0.08315	-0.07627
$(a/5, b/2, h)$	-0.42345	-0.39564	-0.17539	-0.16233	-0.07655	-0.06880
\overline{U}						
$(2a/5, b/2, h)$	-0.08384	-0.08411	-0.02583	-0.02513	-0.00978	-0.00912
$(a/5, b/2, h)$	-0.19909	-0.19776	-0.06235	-0.05990	-0.02328	-0.02130
\overline{V}						
$(a/2, 2b/5, h)$	-0.14159	-0.13815	-0.04463	-0.04310	-0.01602	-0.01501
$(a/2, b/5, h)$	-0.39227	-0.37862	-0.11961	-0.11448	-0.04231	-0.03942
$\sigma_x/q(x=a/2, y=b/2)$						
上层上表面	-2.7982	-2.655	-2.0765	-2.058	-2.0991	-2.112
上层下表面	-1.0144	-1.001	-0.2179	-0.1517	0.2518	0.3674
中层上表面	-0.3236	-0.3126	-0.1652	-0.1436	-0.0703	-0.0327
中层下表面	0.1563	0.1291	0.0056	-0.0162	-0.0225	-0.0355
下层上表面	0.81996	0.7610	0.0656	0.0393	-0.0822	-0.0839
下层下表面	2.4173	2.314	1.1201	1.051	0.5569	0.5020
$\sigma_x/q(x=0, y=b/2)$						
上层上表面	22.611	5.885	16.283	4.944	14.931	4.627
上层下表面	-9.8081	-1.269	-8.0061	-2.241	-7.5402	-2.628
中层上表面	-1.9616	-0.2539	-1.6012	-0.4482	-1.5080	-0.526
中层下表面	0.7775	0.0816	0.3937	0.1185	0.2069	0.0739
下层上表面	3.8875	0.4081	1.9684	0.5924	1.0345	0.3694
下层下表面	-10.061	-3.592	-3.9700	-1.600	-1.8343	-0.7312
$\sigma_y/q(x=a/2, y=b/2)$						
上层上表面	-3.3256	-3.202	-2.2681	-2.253	-2.0886	-2.112
上层下表面	-1.8017	-1.732	-0.7324	-0.6538	-0.1896	-0.0716
中层上表面	-0.4810	-0.4588	-0.2681	-0.2441	-0.1586	-0.1205
中层下表面	0.3481	0.3123	0.1027	0.0782	0.0247	0.0101
下层上表面	1.7793	1.677	0.5510	0.5115	0.1538	0.443
下层下表面	3.2291	3.129	1.5276	1.457	0.7377	0.6795
$\tau_{xz}/q(x=0, y=b/2)$						
上层下表面	1.3273	4.418	1.0454	3.254	0.9302	2.722
中层上表面	1.3273	0.8836	1.0454	0.6508	0.9302	0.5444
中层下表面	0.6035	0.4649	0.2878	0.1910	0.1428	0.0822
下层上表面	0.6035	2.324	0.2878	0.9548	0.1428	0.4114

算例 两端固支两端简支三层横观各向同性弹性地基板(图2)的上表面受均布法向压力 q 作用,第一和第三层材料相同,每层均有如下弹性常数:

$$C_{12}/C_{11} = 0.246269; C_{13}/C_{11} = 0.0831715;$$

$$C_{33}/C_{11} = 0.530172; C_{44}/C_{11} = 0.266810;$$

$$C_{66}/C_{11} = 0.3768655; K_a/C_{11}^{(2)} = 0.01;$$

$$C_{11}^{(1)}/C_{11}^{(2)} = 5$$

几何参数为 $a = b$, h/a 如表如示。

计算结果如表1。表中对应的级数取项为 $n = 1, 3, 5, \dots, 29$, $m = 1, 3, 5, \dots, 99$ 。SAP5有限元解,采用8节点150个三维块体等参元和25个边界单元(取1/4板)。作者求出的精确解与有限元解对比,除边界应力外,内部各点力学量相差均较小。众所周知,有限元解的弱点之一是边界应力很难算准,对叠层板SAP5给出的 τ_{xz} 在层间不满足连续条件,这除了有限元本身因素外,还与网格划分、边界固定点数等情况有关。

5 结语

1) 应用状态空间理论求解叠层地基板结构的位移和应力行之有效,给出的解满足弹性力学基本方程,边界条件和层间协调条件。

2) 计算表明状态空间法可将三维问题分离为一维问题求解,使复杂的工程计算大大减化,计算效率高、精度高是有限元法无法相比的。

3) 由于计算结果均为无量纲量,因此它适用于一

批弹性比相同的实际工程。

4) 考虑地基与板协同工作,地基反力直接作为非独立状态变量引入到状态方程解析式中,方法简单明了,概念清晰,既符合实际问题又求解方便。

5) 状态空间法可推广到动力和稳定问题的求解。

参考文献:

- [1] TIMOSHENKO S, Woinowsky-Krieger Theory of Plates and Shells[M]. 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.
- [2] 张福范. 弹性薄板[M](第二版) 北京: 科学出版社, 1984.
- [3] 石小平, 姚祖康. 弹性地基上四边自由矩形厚板的解[J]. 力学与实践, 1986, 14(2): 19-23.
- [4] WANG J C. Fundamental Solutions and Boundary Integral Equations for Reissner's Plates on Two Parameter Foundations[J]. Int J. Solids & Structures, 1992, 29: 1 233-1 239.
- [5] FAN JIARANG, YE JIANGIAO. An Exact Solution for the Statics and Dynamics of Laminated Thick Plates with Orthotropic Layers[J]. Int J. Solids & Structures, 1990, 26: 655-662.
- [6] 范家让. 强厚度叠层板壳的精确理论[M] 北京: 科学出版社, 1996.
- [7] 高荣誉, 范家让. 四边简支强厚度地基板的精确解[J]. 合肥工业大学学报, 1997, 20(1): 61-67.

Three-Dimensional Solutions of Thick Transverse Isotropic Laminates with Clamped Edges on Elastic Foundations

GAO Rong-yu

(Department of Architectural Engineering and Material, Anhui Institute of Architecture, Hefei 230022, China)

Abstract: Discarding any assumption regarding displacement or stress models, and introducing δ -function, the state equation is established for thick transverse isotropic foundation laminates under any given loads. Exact solutions are presented for thin, moderately thick and thick foundation Laminates. All equations of elasticity can be satisfied, and five elastic constants can be taken into account. The interface or arbitrary point displacements and stress components, as well as foundation reactions can be worked out.

Key words: thick foundation laminate; state equation; compatible interlaminate; exact solution

(责任编辑 钟学恒)