131—134

2000 年 11 月 重庆大学学报 (自然科学版) Vol.23 No.6
第 23 卷第 6 期 Journal of Chongqing University(Natural Science Edition) Nov 2000

文章编号:1000-582x(2000)06-0131-04

# $C^{\infty}$系数的二阶奇性常微分方程解的形式*

向长合
(重庆师范学院 数学系,重庆 400047)

**摘 要**:设 $p(t)$、$q(t)\in C^{\infty}[0,+\infty)$,若 $\lambda_1$、$\lambda_2$ 是指标方程 $\lambda(\lambda-1)+p(0)\lambda+q(0)=0$ 的根,$Re\lambda_1\geqslant Re\lambda_2$,则方程 $t^2u_{tt}+tp(t)u_t+q(t)u=0$ 在$(0,+\infty)$内的任一解均可表示为$(c_1+c_2h\ln t)t^{\lambda_1}\varphi(t)+c_2t^{\lambda_2}\psi(t)$,其中 $c_1$,$c_2$ 是任意常数,$\varphi(t)$、$\psi(t)\in C^{\infty}[0,+\infty]$,$\varphi(0)=\psi(0)=1$,$h$ 是一定值且当 $\lambda_1-\lambda_2\neq0,1,2,\cdots$时,$h=0$;当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时,$h=1$。

**关键词**:奇性方程;连续解;Banach 空间 $C^{\infty}$系数,二阶奇性常微分方程,
**中图分类号**:O 175.1 **文献标识码**:A

众所周知,在二阶奇性线性常微分方程的解析理论中有如下基本定理[1]:

若 $p(z)$,$q(z)$ 在 $z=0$ 附近解析,$\lambda_1$、$\lambda_2$ 是指标方程 $\lambda(\lambda-1)+p(0)\lambda+q(0)=0$ 的根,$Re\lambda_1\geqslant Re\lambda_2$,则方程 $z^2u''+zp(z)u'+q(z)u=0$ 有形如:$z^{\lambda_1}\varphi(z)$,$z_{\lambda_2}\psi(z)+h\varphi(z)z^{\lambda_1}\ln z$ 的基本解组,其中 $\varphi(z)$、$\psi(z)$ 在 $z=0$ 附近解析,$h$ 为一定值。

正是由于这个定理,使得 Fuchs 型偏微分方程的解析理论能够建立起来[2],然而,当 $p(t)$、$q(t)\in C^{\infty}[0,+\infty]$时,方程 $t^2u_{tt}+tp(t)u_t+q(t)u=0$ 在$(0,+\infty)$内的解的形式怎样?这一直是人们关心的问题,并且此问题的解决必将推动二阶 Fuchs 型偏微分方程在 $C^{\infty}$ 框架内的解的研究。在下面的讨论中使用如下记号:

$C^k[0,+\infty)$ 表示在$[0,+\infty)$上具有 $k$ 阶连续导数的所有复值函数构成的函数空间。

$t^{\alpha}C^k[0,+\infty)=\{t^{\alpha}f(t):f(t)\in C^k[0,+\infty)\}$,其中 $\alpha$ 是给定的复数。

## 1 方程 $tu_{tt}+p(t)u_t+q(t)u=0$ 的解的形式

**引理 1** 若 $Re\alpha\geqslant0$,$f(t)\in C^k[0,+\infty)$,则 $\int_0^t t^{\alpha}f(t)dt\in t^{\alpha}C^{k+1}[0,+\infty)\cap t^{\alpha+1}C^k[0,+\infty)$。

**证** 当 $Re\alpha\geqslant0$ 时,显然 $t^{-\alpha}\int_0^t t^{\alpha}f(t)dt\in C^{k+1}(0,+\infty)$,$t^{-\alpha-1}\int_0^t t^{\alpha}f(t)dt\in C^k(0,+\infty)$ 且:

$$\lim_{t\to0^+}[t^{-\alpha}\int_0^t t^{\alpha}f(t)dt]^{(k+1)}=\lim_{t\to0^+}\left[f^{(k)}(t)-\alpha\frac{\int_0^t t^{\alpha+k}f^{(k)}(t)dt}{t^{\alpha+k+1}}\right]=\frac{k+1}{\alpha+k+1}f^{(k)}(0)$$

$$\lim_{t\to0^+}[t^{-\alpha-1}\int_0^t t^{\alpha}f(t)dt]^{(k)}=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t t^{\alpha+k}f^{(k)}(t)dt}{t^{\alpha+k+1}}=\frac{1}{\alpha+k+1}f^{(k)}(0)$$

$$\therefore\int_0^t t^{\alpha}f(t)dt\in t^{\alpha}c^{k+1}[0,+\infty)\cap t^{\alpha+1}C^k[0,+\infty)$$

注:在上述求极限过程中使用了 L'Hospital 法则,虽然当 $\alpha$ 是复数时,$t^{\alpha+k+1}$ 是复值函数,但可以证明:对此复值函数,L'Hospital 法则仍然成立。

通过变量代换:$s=t^{1+\alpha}$,显然有:

**引理 2** 若 $\alpha>-1$ 且 $n\times n$ 复值矩阵$\boldsymbol{A}(t)$在[0,

* 收稿日期:2000-03-22
作者简介:向长合(1963-),男,四川岳池人,讲师,硕士。主要研究方向为偏微分方程。

$-\infty)$ 上连续，则初值问题

$$\begin{cases} u_t = t^\alpha A(t)u \\ u(0) = u_0 \in C^n \end{cases}$$

在 $[0,+\infty)$ 上有唯一连续解。

**定理 1** 若 $p(t),q(t)\in C^\infty[0,+\infty)$，$Rep(0)\geqslant 1$，则广义初值问题：

$$\left.\begin{aligned} &tu_{tt}+p(t)u_t+q(t)u=0 \\ &u(0)=1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

在 $C^\infty[0,+\infty)$ 内有唯一解 $u=\varphi(t)$。

**证** 令 $v_1=u$，$v_2=tu_t$，则广义初值问题(1)在 $C^\infty[0,+\infty)$ 内有唯一解等价于初值问题：

$$\left.\begin{aligned} &v'_1=\frac{1}{t}v_2 \\ &v'_2=-\frac{\rho}{t}v_2+q_1v_1+p_1v_2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

在 $C^\infty[0,+\infty)$ 内有唯一解，其中 $\rho=p(0)-1$，$p_1(t)=\dfrac{p(0)-p(t)}{t}\in C^\infty[0,+\infty)$，$q_1(t)=-q(t)\in C^\infty[0,+\infty)$。

由假设：$Rep(0)\geqslant 1$ 知 $Re\rho\geqslant 0$，下面分两种情况进行讨论：

1° 若 $\rho\neq 0$，此时令 $w_1=v_1+\dfrac{1}{\rho}v_2$，$w_2=v_2$，则(2)在 $C^\infty[0,+\infty)$ 内有唯一解等价于：

$$\left.\begin{aligned} &w'_1=\left[q_1w_1+\left(p_1-\frac{q_1}{\rho}\right)w_2\right]\cdot\frac{1}{\rho} \\ &w'_2=-\frac{\rho}{t}w_2+q_1w_1+\left(p_1-\frac{q_1}{\rho}\right)w_2 \\ &w_1(0)=1,\ w_2(0)=0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

在 $C^\infty[0,+\infty)$ 内有唯一解。

注意到(3)在 $C^\infty[0,+\infty)$ 内有唯一解又等价于如下积分方程组(4)在 $C^\infty[0,+\infty)$ 内有唯一解：

$$\left.\begin{aligned} &w_1=1+\int_0^t\frac{1}{\rho}\left[q_1w_1+\left(p_1-\frac{q_1}{\rho}\right)w_2\right]dt \\ &w_2=t^{-\rho}\int_0^t t^\rho\left[q_1w_1+\left(p_1-\frac{q_1}{\rho}\right)w_2\right]dt \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

下面首先证明(4)在 $[0,+\infty)$ 上有唯一连续解。

$\forall a>0$，记

$$M=\max_{0\leqslant t\leqslant a}\left(|q_1|+\left|p_1-\frac{q_1}{\rho}\right|\right)\frac{1+|\rho|}{|\rho|}$$

其中 $|\cdot|$ 代表复数的模，取 $\beta=2M+1$，令 $H=\{(f_1,f_2):f_1(t),f_2(t)\in C[0,a]\}$，在 $M$ 上定义范数如下：

$$\|f\|=\max_{0\leqslant t\leqslant a}[(|f_1(t)|+|f_2(t)|)e^{-\beta t}]$$

其中 $f=(f_1,f_2)\in H$，则 $H$ 成为 Banach 空间。在 $H$ 上定义算子 $T:Tf=(g_1,g_2)$，其中 $f=(f_1,f_2)\in H$，$g_1(t)=1+\int_0^t\frac{1}{\rho}\left[q_1f_1+\left(p_1-\frac{q_1}{\rho}\right)f_2\right]dt$，$g_2=t^{-\rho}\int_0^t t^\rho\left[q_1f_1+\left(p_1-\frac{q_1}{\rho}\right)f_2\right]dt$，由于 $Re\rho\geqslant 0$，由引理 1 知：$Tf\in H$。

$\forall f=(f_1,f_2)\in H$，$\tilde f=(\tilde f_1,\tilde f_2)\in H$，令 $Tf=(g_1,g_2)$，$T\tilde f=(\tilde g_1,\tilde g_2)$，则 $\forall t\in[0,a]$，有：

$|g_1(t)-\tilde g_1(t)|\leqslant$

$\int_0^t M(|f_1(t)-\tilde f_1(t)|+|f_2(t)-\tilde f_2(t)|)dt=$

$\int_0^t M(|f_1(t)-\tilde f_1(t)|+|f_2(t)-\tilde f_2(t)|)e^{-\beta t}e^{\beta t}dt\leqslant$

$\dfrac{M}{\beta}e^{\beta t}\cdot\|f-\tilde f\|$

$|g_2(t)-\tilde g_2(t)|\leqslant\dfrac{M}{\beta}e^{\beta t}\cdot\|f-\tilde f\|$

$\therefore\ \|Tf-T\tilde f\|=$

$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant a}[(|g_1(t)-\tilde g_1(t)|+|g_2(t)-\tilde g_2(t)|)e^{-\beta t}]\leqslant$

$\dfrac{2M}{\beta}\|f_1(t)-\tilde f\|$

注意到 $0\leqslant\dfrac{2M}{\beta}<1$，故 $T$ 为 Banach 空间 $H$ 上的压缩映象，由压缩映象原理，$T$ 有唯一不动点，设此不动点为 $(\varphi_1,\varphi_2)\in H$，则 $w_1=\varphi_1$，$w_2=\varphi_2$ 是积分方程组(4)在 $[0,a]$ 上的唯一连续解，由 $a$ 的任意性及连续解的唯一性知：$w_1=\varphi_1$，$w_2=\varphi_2$ 是(4)在 $[0,+\infty)$ 上的唯一连续解。

下面归纳证明 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in C^\infty[0,+\infty)$，设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in C^k[0,+\infty)(k=0,1,2,\cdots)$，则由引理 1 知：

$\varphi_1(t)=$

$1+\int_0^t\frac{1}{\rho}\left[q_1\varphi_1+\left(p_1-\frac{q_1}{\rho}\right)\varphi_2\right]dt\in C^{k+1}[0,+\infty)$

$\varphi_2(t)=$

$t^{-\rho}\int_0^t t^\rho\left[q_1\varphi_1+\left(p_1-\frac{q_1}{\rho}\right)\varphi_2\right]dt\in C^{k+1}[0,+\infty)$

由归纳法知：$\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in C^\infty[0,+\infty)$，即 $w_1=\varphi_1$，$w_2=\varphi_2$ 是(4)在 $C^\infty[0,+\infty)$ 内的唯一解。

所以，$u=\varphi(t)=\varphi_1(t)-\dfrac{1}{\rho}\varphi_2(t)$ 是广义初值问题(1)在 $C^\infty[0,+\infty)$ 内的唯一解。

2° 当 $\rho=0$ 时，令 $A_0=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$A_1(t)=$

$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -q_1(t) & p_1(t)\end{bmatrix}$，$V=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$，则初值问题(2)变成

$$\left.\begin{aligned} V' &= \frac{1}{t}A_0V + A_1(t)V \\ V(0) &= \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

令 $V = t^{A_0}W = \begin{bmatrix}1 & \ln t\\ 0 & 1\end{bmatrix}W$，则

$$\left.\begin{aligned} W' &= B(t)W \\ W(0) &= \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

其中

$$B(t) = t^{-A_0}A_1(t)t^{A_0} = \begin{bmatrix}-q_1\ln t & -\ln t\cdot(q_1\ln t + p_1)\\ q_1 & q_1\ln t + p_1\end{bmatrix}$$

显然 $t^{\frac{1}{2}}B(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，由引理2，初值问题(6)在 $[0,+\infty)$ 上有唯一连续解 $W=\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}$，且

$w_2 = \int_0^t[q_1w_1 + (q_1\ln t + p_1)w_2]\mathrm{d}t \in t^{\frac{1}{2}}C[0,+\infty)$

所以 $v_1=\varphi_1 = w_1 + w_2\cdot\ln t$，$v_2=\varphi_2=w_2$ 是初值问题(2)在 $[0,+\infty)$ 上的连续解。

下面归纳证明 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in C^{\infty}[0,+\infty)$，设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in C^k[0,+\infty)(k=0,1,2,\cdots)$，则由引理1知：

$\varphi_2(t) =$

$\int_0^t(q_1\varphi_1 + p_1\varphi_2)\mathrm{d}t \in C^{k+1}[0,+\infty)\cap tC^k[0,+\infty)$

$\therefore\quad \varphi_1'(t) = \frac{\varphi_2(t)}{t} \in C^k[0,+\infty)$

$\therefore\quad \varphi_1(t)\in C^{k+1}[0,+\infty)$

由归纳法知：$\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in C^{\infty}[0,+\infty)$，故 $u=\varphi(t)=\varphi_1(t)$ 是广义初值问题(1)在 $C^{\infty}[0,+\infty)$ 内的解，注意到(6)在 $[0,+\infty)$ 上的连续解的唯一性，可知 $u=\varphi(t)$ 是(1)在 $C^{\infty}[0,+\infty)$ 内的唯一解。

**定理2**　设 $p(t),q(t)\in C^{\infty}[0,+\infty)$，$Re\,p(0)\geq 1$，$\rho = p(0)-1$，则方程 $tu_{tt}+p(t)u_t+q(t)u=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内的任一解均可表示为 $(c_1+c_2h\ln t)\varphi(t)+c_2t^{-\rho}\psi(t)$，其中 $c_1,c_2$ 是任意常数，$\varphi(t),\psi(t)\in C^{\infty}[0,+\infty)$，$\varphi(0)=\psi(0)=1$，$h$ 是一定值，且当 $\rho\neq 0,1,2,\cdots$ 时，$h=0$；当 $\rho=0$ 时，$h=1$。

**证**　设 $\varphi(t)$ 是广义初值问题(1)在 $C^{\infty}[0,+\infty)$ 内的解，则 $\varphi(t)\neq 0$，$t\in[0,+\infty)$。故 $\varphi(t)$，$\varphi(t)\int\frac{1}{\varphi^2(t)}e^{-\int\frac{p(t)}{t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ 是方程(7)：$tu_{tt}+p(t)u_t+q(t)u=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内的基本解组。

令 $g(t) = \frac{1}{\varphi^2(t)}e^{\int_0^t p_1(t)\mathrm{d}t}$。其中 $p_1(t) = \frac{p(0)-p(t)}{t}\in C^{\infty}[0,+\infty)$，故 $g(t)\in C^{\infty}[0,+\infty)$，且 $g(0)=1$，取 $k=[Re\rho]$，则

$$g(t) = 1 + g'(0)t + \cdots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^k + t^{k+1}g_k(t)$$

$$g_k(t)\in C^{\infty}[0,+\infty)$$

$$\begin{aligned}\therefore\varphi(t)\int\frac{1}{\varphi^2(t)}e^{-\int\frac{p(t)}{t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t &= \\ c_0\varphi(t)\int t^{-p(0)}g(t)\mathrm{d}t &= \\ c_0\varphi(t)\int t^{-\rho-1}\Big[1+g'(0)t+\cdots &+ \\ \frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^k + t^{k+1}g_k(t)\Big]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

其中 $c_0$ 是非零常数。

1° 若 $\rho\neq 0,1,2,\cdots$，则 $Re(k+1-\rho)>0$，取

$$\psi(t) = -\rho\varphi(t)\Big[-\frac{1}{\rho}+\frac{g'(0)}{1-\rho}t+\cdots+\frac{g^{(k+1)}(0)}{(k+1-\rho)(k+1)!}t^{k+1}+t^{k+1}\cdot t^{\rho-k-1}\int_0^t t^{k+1-\rho}g_{k+1}(t)\mathrm{d}t\Big]$$

则 $\psi(0)=1$ 且由引理1知：

$$\psi(t)\in C^{\infty}[0,+\infty)$$

所以 $\varphi(t)$，$t^{-\rho}\psi(t)$ 是(7)在 $(0,+\infty)$ 内的基本解组，故(7)在 $[0,+\infty)$ 内的任一解均可表示为 $c_1\varphi(t)+c_2t^{-\rho}\psi(t)$。

2° 若 $\rho=1,2,\cdots$，则 $k=\rho$，取：

$$\psi(t) = -k\varphi(t)\Big[-\frac{1}{k}+\frac{g'(0)}{1-k}t+\cdots+\frac{g^{(k-1)}(0)}{(-1)\cdot(k-1)!}t^{k-1}+\int_0^t g_k(t)\mathrm{d}t\Big]$$

则 $\psi(0)=1$ 且 $\psi(t)\in C^{\infty}[0,+\infty)$。故 $\varphi(t)$，$t^{-\rho}\psi(t)+h\ln t\cdot\varphi(t)$ 是(7)在 $(0,+\infty)$ 内的基本解组，其中 $h=-k\cdot\frac{g^{(k)}(0)}{k!}$ 是一定值。

3° 若 $\rho=0$，则

$$\varphi(t)\int\frac{1}{\varphi^2(t)}e^{-\int\frac{p(t)}{t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = c_0\varphi(t)\Big[\ln t+\int g_1(t)\mathrm{d}t\Big]$$

取

$$\psi(t) = \varphi(t)[\int_0^t g_1(t)dt + 1]$$

有

$$\psi(0) = 1 \qquad \psi(t) \in C^\infty[0, +\infty)$$

所以 $\varphi(t)$、$\psi(t) + \varphi(t)\ln t$ 是(7)在$(0, +\infty)$内的基本解组。

注：在前面讨论过程中，经过详细分析，可以得到如下结果：若 $q(t) \in C^k[0, +\infty)$，$p(t) \in C^{k+1}[0, +\infty)(k = 0,1,2,\cdots)$，$Rep(0) \geqslant 1$，$\rho = p(0) - 1$，则定理 2 的相应结论成立，其中 $\varphi(t)$，$\psi(t) \in C^{k+1}[0, +\infty) \cap C^{k-2}(0, +\infty)$。

由定理 2，显然有：

若 $p(t)$，$q(t) \in C^\infty[0, +\infty)$，$Rep(0) \geqslant 1$，则如下广义初值问题：

$$\begin{cases} tu_{tt} + p(t)u_t - q(t)u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in C \end{cases}$$

在$[0, +\infty)$内存在唯一连续解 $u = \tilde{\varphi}(t)$，且 $\tilde{\varphi}(t) \in C^\infty[0, +\infty)$。

## 2 方程 $t^2u_{tt} + tp(t)u_t + q(t)u = 0$ 的解的形式

**定理 3** 设 $p(t)$，$q(t) \in C^\infty[0, +\infty)$，若 $\lambda_1$、$\lambda_2$ 是指标方程 $\lambda(\lambda - 1) + p(0)\lambda + q(0) = 0$ 的根，$Re\lambda_1 \geqslant Re\lambda_2$，则方程(8)：$t^2u_{tt} + tp(t)u_t + q(t)u = 0$ 在$(0, +\infty)$内的任一解均可表示为 $(c_1 + c_2h\ln t)t^{\lambda_1}\varphi(t) + c_2t^{\lambda_2}\psi(t)$，其中 $c_1$、$c_2$ 是任意常数，$\varphi(t)$、$\psi(t) \in C^\infty[0, +\infty)$，$\varphi(0) = \psi(0) = 1$，$h$ 是一定值，且当 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0,1,2,\cdots$ 时，$h = 0$，当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时，$h = 1$。

**证** 令 $t = u^{\lambda_1}v$，则方程(8)变成：

$$tv_{tt} + \tilde{p}(t)v_t + \tilde{q}(t)v = 0$$

其中

$$\tilde{p}(t) = p(t) + 2\lambda_1 \in C^\infty[0, +\infty)$$

$$\tilde{q}(t) = \frac{\lambda_1(p(t) - p(0)) + q(t) - q(0)}{t} \in C^\infty[0, +\infty)$$

注意到 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - p(0)$，故 $\tilde{p}(0) = p(0) + 2\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_2 + 1$，所以 $Re\tilde{p}(0) \geqslant 1$ 且 $\rho = \tilde{p}(0) - 1 = \lambda_1 - \lambda_2$，由定理 2 即得证。

若 $p(t)$，$q(t) \in C^\infty[0, +\infty)$，$\lambda_1$、$\lambda_2$ 是指标方程 $\lambda(\lambda - 1) + p(0)\lambda + q(0) = 0$ 的根，$Re\lambda_1 \geqslant Re\lambda_2$，则如下奇性初值问题

$$\begin{cases} t^2u_{tt} + tp(t)u_t + q(t)u = 0 \\ t^{-\lambda_1}u|_{t\to 0} = u_0 \in C \end{cases}$$

在 $t^{\lambda_1}C[0, +\infty) \cap c^2(0, +\infty)$ 内存在唯一解 $u = \tilde{\varphi}(t)$，且 $\tilde{\varphi}(t) \in t^{\lambda_1}C^\infty[0, +\infty)$。

**参考文献：**

[1] 尤秉礼．常微分方程补充教程[M]．北京：人民教育出版社，1982．

[2] 戴正德，杨光俊．Fuchs 型偏微分方程[M]．昆明：云南大学出版社，1992．

# Form of Solutions for the Second Order Singular Ordinary Differential Equations with $C^\infty$ Coefficients

*XIANG Chang-he*

(Department of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

**Abstract**: The paper proves that if $p(t)$, $q(t) \in C^\infty$ and $\lambda_1$, $\lambda_2$ are roots of index equation $\lambda(\lambda - 1) + p(0)\lambda + q(0) = 0$, $Re\lambda_1 \geqslant Re\lambda_2$, then all solutions of equation $t^2u_{tt} + tp(t)u_t + q(t)u = 0$ in $(0, +\infty)$ can be expressed by $(c_1 + c_2h\ln t)t^{\lambda_1}\varphi(t) + c_2t^{\lambda_2}\psi(t)$, where $c_1$, $c_2$ are arbitrary constants, $\varphi(t)$, $\psi(t) \in C^\infty[0, +\infty]$, $\varphi(0) = \psi(0) = 1$, $h$ is a fixed value and $h = 0$ when $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0, 1, 2, \cdots$, $h = 1$ when $\lambda_1 = \lambda_2$.

**Key words**: singular equation; continuous solution; Banach space

（责任编辑 张小强）