

文章编号:1000-582x(2001)01-0004-04

# 基于快速小波变换的信号分析系统

汤宝平, 秦树人, 谭善文

(重庆大学机械工程学院测试中心, 重庆 400044)

**摘要:**介绍了小波分析中的快速小波变换算法, 通过与常用小波基相对应的正交镜像滤波器组, 实现了对信号的快速小波分解和重构。结合虚拟仪器技术, 研制成功虚拟式快速小波变换信号分析系统。经由该系统分析的动态信号, 既可看到信号的概貌, 又可看到信号的细节, 特别能捕获到反映设备重要故障特征的奇异信号以及提纯被噪声污染的信号。

**关键词:**快速小波变换; 正交镜像滤波器组; 信号; 分解; 重构

**中图分类号:** TH 115

**文献标识码:** A

信号分析是机械设备状态监测和故障诊断的重要手段。包含在机器设备的振动信号中的奇异点往往携带了设备运行状态的重要信息, 它们反映了引起故障的撞击、振荡、摩擦、转速突变、结构变形与断裂等物理现象。传统的傅氏分析不能很好地揭示奇异信号的特征, 而小波分析由于它在时域和频域同时具有良好的局部化特性, 因此能够很好地反映出奇异信号的特征。快速小波变换是实现小波分析的一种现代算法, 基于快速小波变换的信号分析系统, 可以为机械故障诊断提供一种强有力的分析手段。

## 1 快速小波变换

1988年, Mallat提出了小波分解和重构算法<sup>[1]</sup>, 它是通过正交镜像滤波器组对信号进行分解和重构的。由于该算法计算速度快, 故把它称作快速小波变换(FWT)算法。

根据Mallat的多分辨率的理论, 设 $\{V_j\}_{j \in Z}$ 是 $L^2(R)$ 空间的一多分辨率向量空间, 则存在一维尺度函数 $\varphi(t)$ 和一维小波函数 $\psi(t)$ , 平移和伸缩所形成的函数系如下:

$$\{\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k), j \in Z, k \in Z\} \quad (1)$$

$$\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k), j \in Z, k \in Z\} \quad (2)$$

式(1)和(2)分别构成 $V_j$ 和 $W_j$ 的规范正交基, 其中 $W_j$ 为 $V_j$ 的正交补空间,  $j$ 为尺度参数,  $k$ 为平移参数。令尺度因子为 $2^j$ , 则分辨率为 $2^{-j}$ 。尺度因子越小, 分辨率越高, 能识别快变信号, 对应信号的高频成份; 反之尺度因子越大, 分辨率越差, 只能识别缓变信号, 对应信号的低频成份。

快速小波变换算法的基本思想是将一个分辨率为1的离散逼近信号 $A_0[f(t)]$ (实际上为原始采样信号)分解一个粗分辨率为 $2^{-j}$ 的离散逼近信号 $A_j[f(t)]$ 和逐次离散细节信号 $D_j[f(t)]$ ( $0 < j \leq J$ )。设某信号 $f(t) \in L^2(R)$ 在分辨率 $2^{-j}$ 的离散逼近信号为 $A_j[f(t)]$ , 则 $f(t)$ 在较粗分辨率 $2^{-(j+1)}$ 的离散逼近信号 $A_{j+1}[f(t)]$ 和离散细节信号 $D_{j+1}[f(t)]$ 求法如下:

因为

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j+1,m} \rangle = \bar{h}(k - 2m) \quad (3)$$

$$\langle \varphi_{j,k}, \psi_{j+1,m} \rangle = \bar{g}(k - 2m) \quad (4)$$

注意到 $\bar{h}(k - 2m)$ 和 $\bar{g}(k - 2m)$ 与 $j$ 无关

可得 $f(t)$ 在分辨率为 $2^{-(j+1)}$ 的离散逼近系数 $C_{j+1,m}$ 和离散细节系数 $D_{j+1,m}$

$$C_{j+1,m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{h}(k - 2m) C_{j,k} \quad (5)$$

收稿日期: 2000-10-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(批准号: 59875090)

作者简介: 汤宝平(1971-), 男, 湖北黄梅人, 重庆大学在职博士生, 主要从事虚拟仪器与测试技术的研究。

$$D_{j+1,m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{g}(k-2m) C_{j,k} \quad (6)$$

式(5)和(6)中  $C_{j,k}$  为  $f(t)$  在分辨率  $2^{-j}$  的离散逼近系数,注意到  $j=0$ ,分辨率  $2^{-j}=1$  时的  $C_{0,k}=f[k]$  为原始采样信号。

于是有

$$A_{j+1}f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{j+1,m} \varphi_{j+1,m}(t) \quad (7)$$

$$D_{j+1}f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{j+1,m} \psi_{j+1,m}(t) \quad (8)$$

引入无穷矩阵  $H=(H_{m,k}), G=(G_{m,k})$ , 其中  $H_{m,k}=\bar{h}(k-2m), G_{m,k}=\bar{g}(k-2m)$ , 则式(5)和(6)可写成以下简洁形式:

$$\begin{cases} C_{j+1} = HC_j \\ D_{j+1} = HD_j \end{cases} \quad (j=0,1,\dots,J-1) \quad (9)$$

式(9)便是快速小波分解算法,信号  $f(t)$  在分辨率为  $2^{-(J-1)}$  时的分解结果为:

$$A_J f(t) = A_{J-1} f(t) + D_{J-1} f(t) \quad (10)$$

在式(10)两边同时与尺度函数  $\varphi_{j,k}$  作内积,易得

$$\begin{aligned} C_{j,k} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(k-2m) C_{j+1,m} + \\ &\sum_{m=-\infty}^{\infty} g(k-2m) D_{j-1,m} \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)的简洁形式如下:

$$C_j = H^* C_{j+1} + G^* D_{j-1} \quad (j=J-1,\dots,1,0) \quad (12)$$

其中  $H^*$  和  $G^*$  分别是  $H$  和  $G$  的对偶算子,式(12)便是快速小波重构算法。

## 2 信号的小波分解和重构

### 2.1 正交镜像滤波器组

小波变换是将原始信号与小波基进行内积运算,而快速小波变换是将内积运算转换为信号和离散滤波器的卷积运算,快速小波变换中的小波基的选择转化为正交镜像滤波器(QMF)的选择。

事实上,为了实现快速小波变换,只需要正交镜像滤波器组:  $H, G, H^*$  和  $G^*$ ,而不必进行滤波器的多分辨率分析,因为滤波器与尺度参数  $j$  无关。 $H$  为低通分解滤波器,离散形式记为  $h(n)$ ;  $G$  为高通分解滤波器,离散形式记为  $g(n)$ ;  $H^*$  为低通重构滤波器,离散形式记为  $rh(n)$ ;  $G^*$  为高通重构滤波器,离散形式记为  $rg(n)$ 。滤波器组与尺度函数  $\varphi(t)$  和小波函数  $\psi(t)$  有关,据多分辨率框架理论,存在一个双尺度关系式<sup>[2]</sup>:

$$\frac{1}{2} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} rh(n) \varphi(t-n) \quad (13)$$

对于一个已知的小波基,它的尺度函数和小波函数也为已知,据式(13)可得低通重构滤波器  $rh(n)$ 。其它三个滤波器可由下面式子求得:

$$rg(n) = (-1)^n rh(2N-1-n), 0 \leq n \leq 2N-1 \quad (14)$$

$$h(n) = rh(2N-1-n), 0 \leq n \leq 2N-1 \quad (15)$$

$$g(n) = rg(2N-1-n), 0 \leq n \leq 2N-1 \quad (16)$$

正交镜像滤波器组有两类:正交和双正交。正交是指低通分解滤波器  $H$  和高通分解滤波器  $G$  正交,低通重构滤波器  $H^*$  和高通重构滤波器  $G^*$  正交;双正交是指低通分解滤波器  $H$  和高通重构滤波器  $G^*$  正交,低通重构滤波器  $H^*$  和高通分解滤波器  $G$  正交。常用的几个正交小波基有 Daubechies 小波, Beylkin 小波, Coifman 小波及插值样条小波,它们的  $rh(n)$  序列见文献[2]

### 2.2 快速小波分解

对于一个已知长度为  $N$  的离散原始信号样本  $f(k)$ ,最多可进行  $\log_2 N$  次分解。将样本  $f(k)$  与低通分解滤波器  $h(n)$  进行卷积滤波,下抽样即保留偶数下标样本后,得离散逼近系数  $cA_1$ ;将样本  $f(k)$  与高通分解滤波器  $g(n)$  进行卷积滤波,下抽样即保留偶数下标样本后,得离散细节系数  $cD_1$ 。这就是信号的第一次小波分解。

设信号的第  $j$  次分解的离散逼近系数为  $cA_j$ ,则计算第  $j+1$  次的  $cA_{j+1}$  和  $cD_{j+1}$  的程序流程图如图 1 所示。

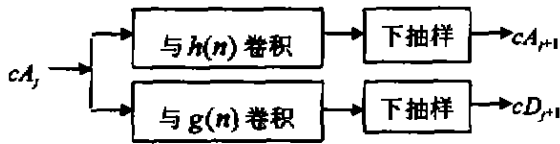


图1 第j+1次分解过程程序流程图

设最大分解次数为J,则  $0 \leq j < J$ ,其中当  $j = 0$  时  $cA_0 = f(k)$ 。由于实施了下抽样,使得  $j + 1$  次的样本点数是  $j$  次的样本点数的一半,相当于样本的采样频率  $f_s$  减半。由于  $h(n)$ 、 $g(n)$  与尺度参数  $j$  无关,为保持样本的采样频率与小波基的采样频率一致性,固定样本采样频率  $f_s$  不变,伸展信号的固有频率  $f_0$ ,这样,保证了数值计算的可行性,这主要是由尺度函数  $\varphi(t)$  和小波函数  $\psi(t)$  的一些特性所决定的<sup>[3]</sup>。不难从下面的信号表达式看出:

$$\begin{aligned} \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} \cdot 2n\right) &= \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_s/2} \cdot n\right) = \\ \sin\left(2\pi \frac{2f_0}{f_s} \cdot n\right) \end{aligned} \quad (17)$$

### 2.3 快速小波重构

上述分解只是求得离散逼近系数  $cA_j (0 < j \leq J)$  和离散细节系数  $cD_j (0 < j \leq J)$ ,要求得离散逼近信号  $A_j (0 < j \leq J)$  和离散细节信号  $D_j (0 < j \leq J)$ ,须进行小波重构。重构的程序流程图如图2所示。

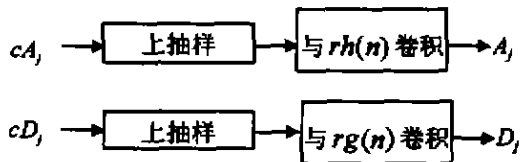


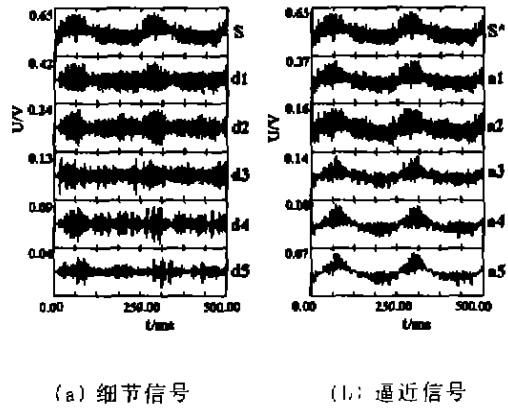
图2 第j次重构过程程序流程图

其中上抽样采用经典的内插法实现,即在相邻两个样本之间插入一个零值,以扩展样本长度。这样

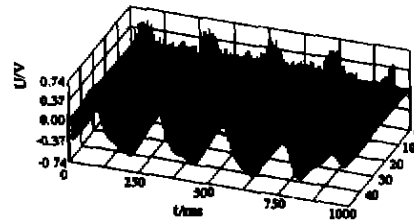
$$A_j + D_j + D_{j-1} + \dots + D_2 + D_1 = f(k) \quad (18)$$

上述实现过程包括三个方面的内容,首先把原始信号分解得到不同分辨率的小波系数,再修正这些系数,最后从这些系数合成不同分辨率分解分量、逼近分量和原始信号的重构。可见快速小波变换的实质是把原始信号不同频率段的信息抽取出来,并将其显示于时间轴上,这样既可反映信号的时域特征也可反映信号的频域特征。小尺度高分辨率的变换包含信号的高

频成分,大尺度低分辨率的变换包含信号的低频成分。这样,实际应用中可根据需要,择取不同尺度的变换来描述信号的特征。图3为一磨床振动信号的多分辨率分析,小波基为 db8。



(a) 细节信号 (b) 逼近信号



(c) 三维时间-尺度-幅值谱

图3 一磨床振动信号的多分辨率分析

### 3 动态信号分析系统

利用正交镜像滤波器组,结合虚拟仪器技术<sup>[5]</sup>,实现了用于动态信号分析的一维快速小波变换虚拟仪器系统,如图4所示。该分析仪有常用的小波基可供选择,主要进行一维信号的分解和重构。经由该仪器系统分析的动态信号,既可看到信号的概貌,又可看到信号的细节,特别能捕获到反映设备重要故障特征的奇异信号,以及提纯被噪声污染的信号。

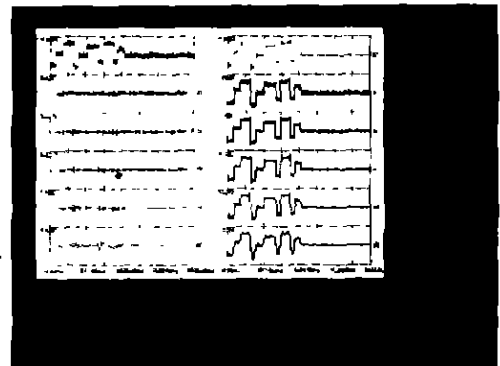


图4 快速小波变换分析系统

为了充分发挥该分析系统的功能,增加了若干必要的辅助功能<sup>[6]</sup>,其中包括FFT分析、细化分析、时域特征值分析、概率统计分析和相关分析等等。这些功能既是小波分析的辅助,又是它的补充,特别是将FFT分析与小波分析结合起来,对于故障诊断分析有很大的好处。除此之外,辅助功能中还有波动态显示和数据记录存储功能。

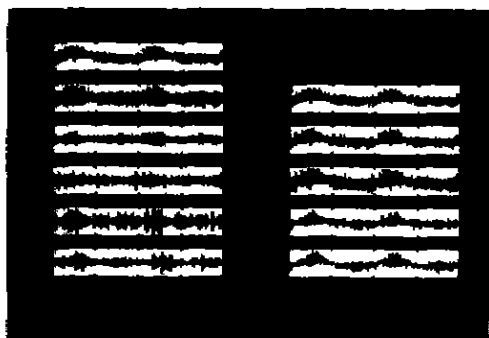


图5 磨床振动信号在 Matlab 中的分析结果

与世界流行的 Matlab 软件中的小波分析工具箱中的分析功能的对比实验表明,该分析系统分析结果正确,小波变换速度快,人机交互界面友好。图5为一磨床振动信号(与图3中的磨床振动信号相同)的 Matlab 中的小波分析结果。图3中的细节信号和逼近信号与图5中的细节信号和逼近信号是一致的。

#### 4 结论

小波分析在振动信号分析中有着广阔的应用前景,除了快速小波变换算法外,还有小波包算法,自适应小波基信号处理,跟踪滤波。当前这些研究的热点很多,但对工程应用而言,关键问题和难点是如何构造满足时频局部特性的小波函数来解决实际问题。

#### 参考文献:

- [1] MALLAT S G. A theory for multi-resolution signal Decomposition: The Wavelet representation [IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intell, 1989, PAMI - 11: 674 - 693.
- [2] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997. 513 - 529.
- [3] QIN SHUREN, CHEN ZHIKUI, XU MING, LIAO, et al. Sampling principle and technology in wavelet analysis for signals[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1998, 11(4): 257-263.
- [4] SHUREN QIN. Integrated Testing Technology and Virtual Instrument[J]. Proceedings On ISIST'99, 1999: 66 - 71.
- [5] 秦树人, 张思复, 汤宝平等. 集成测试技术与虚拟式仪器[J]. 中国机械工程, 1999, 10(1): 77 - 80.
- [6] QIN SHUREN, CHEN ZHIKUI, TANG BAOPING. Research of wavelet transform instrument system for signal analysis[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 13(2): 114 - 120.

## The Signals Analysis System Based on Fast Wavelet Transform

TANG Bao - ping, QIN Shu - ren, TAN Shan - wen

(Test Center, Institute of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** The fast wavelet transform (FWT) algorithm in wavelet analysis was introduced in the paper. With quadrature mirror filters (QMF) associated with popular wavelet bases, the fast wavelet decomposition and reconstruction for signals were implemented. Combined with virtual instrument technique, the FWT analysis system for signals was successfully developed. The system can break up signal not only into approximations, which are the high-scale and low-frequency components of the signal, but also into details which are the low-scale and high-frequency components. Especially it can identify singularity signal, which contain some important message of equipment condition and fault, and refine signal from noisy signal, which is corrupted by noise.

**Key words:** fast wavelet transform; quadrature mirror filters; vibration signals; decomposition; reconstruction

(责任编辑 成孝义)