

文章编号:1000-582x(2001)02-0012-06

小波基时频特性及其在分析突变信号中的应用

谭善文, 秦树人, 汤宝平

(重庆大学机械学院测试中心, 重庆 400044)

摘要: 在机械设备的在线检测和故障诊断中, 振动信号分析是十分重要的手段。包含在振动信号中的突变信号是重要的特征信息。小波分析在在线检测和故障诊断中已逐渐得到了广泛的应用。但采用不同的小波基, 分析结果有很大的差异。笔者通过对小波基时频特性进行分析比较并结合故障分析实例和仿真结果, 总结了选择合适小波基的一些方法。

关键词: 小波变换; 小波基; 时频特性; 突变信号

中图分类号: TH 115

文献标识码: A

在对机械设备进行状态监测和故障信号分析时, 突变信号的检测与识别是十分重要的。突变信号往往隐藏在背景噪声里, 包含突变信号及噪声的振动信号常常表现出非平稳性质, 因此对这类信号的处理具有相当的难度。传统的 FFT 分析仪适合于分析平稳信号, 但是对出现在机械设备和其他现场的众多的非平稳信号的分析却无能为力。目前, 随着小波理论的迅速发展, 从时频两方面对非稳平信号提供了良好的局部化分析手段, 取得了很好的效果。但是在小波信号分析中存在着小波基的选择问题, 不同的小波基具有不同的时频特性, 因此同一信号经过不同的小波基进行分析往往表现出不同的结果, 缺乏可比性和规范性, 给故障诊断带来了困难。

笔者从工程应用背景出发分析了小波基的各种特征, 对如何选择小波基作了研究, 同时对突变信号进行了刻画, 并分析了突变信号与背景噪声在小波变换中所表现出的差异, 说明小波变换非常适合于突变信号的检测与识别。

1 小波基的特征分析

若函数 $\Psi(t)$ 具有如下性质 (1) 波动性, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0 \quad (1)$$

(2) 时域衰减性, 即从时域看它只在一个“小”的范围

内波动, 若超出一定的范围, 其波动的幅度为零或迅速衰减到零;

(3) 频域衰减性, 即从频域看, 其频谱局限在一个“小”的频带内。则称 $\Psi(t)$ 为小波函数或母小波函数。

通过对小波函数引入“平移参数”和“尺度参数”, 可以产生一组函数 $\{\Psi_{a,b}(t)\}$, 这里

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{2^a} \Psi\left(\frac{t}{2^a} - b\right) \quad (2)$$

其中: a 为尺度参数, b 为平移参数。

如果 $\Psi(t)$ 选择得当, $\{\Psi_{a,b}(t)\}$ 可构成一组正交的基函数, 从而对函数 $f(t) \in L^2(R)$ 总能展开成小波级数

$$f(t) = \sum_{a,b} d_{a,b} \Psi_{a,b}(t) \quad (3)$$

得到信号 $f(t)$ 的小波分解, 并从中获取有用的信息。

在傅里叶变换中, 基函数是唯一的。而在小波变换中有许多小波基可供选择, 这种不唯一性一方面满足了实际问题的需要, 另一方面不同的小波基具有不同的时频特征, 采用不同小波基的小波变换结果又缺乏可比性, 因此给小波基的选择带来了困难。

从频域分析的观点看小波基本质上是一组带通滤波器。在不同的应用领域中被分析的信号各具特点, 为了提取信号的有用信息, 需要不同时频特征的小波基, 因此分析比较小波基的时频特性具有实际应用价值。

• 收稿日期: 2000-12-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59875090)

作者简介: 谭善文(1968-), 男, 湖南宜章人, 重庆大学博士生。主要从事机械量测试技术虚拟测试技术和理论的研究。

小波基主要具有下列几个特征：紧支性与衰减性，消失矩，正则性，对称性。这些特征关系到如何选择合适的小波基，以便高效地分析信号。

1.1 紧支性与衰减性

如果描述尺度函数的低通滤波器组 $h(n)$ 可表征为 FIR 滤波器，那么尺度函数和小波函数只在有限区间非零，称小波函数具有紧支性。其支撑区域由 $h(n)$ 决定。紧支性是小波的重要性质，紧支小波不需做人为的截断，应用精度很高。

一个高效的小波基最好能在时域和频域上同时表现出紧支性，这样就可避免频域上交叉项的影响，在时域上也不会引起泄漏。然而由测不准原理可知，同时具有紧支性是不可能满足的。一般希望小波基能够在时域上具有紧支性。

常见的紧支小波基有：Daubechies 小波基系列，Coifman 小波基系列，symlets 小波基系列；mexican hat 小波基，meyer 小波基不具有紧支性。

1.2 消失矩

如果对所有 $0 \leq m \leq M$ ，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \Psi(t) dt = 0 \tag{4}$$

则小波 $\Psi(t)$ 具有 M 阶消失矩，其中 $m, M \in Z$ 。

Daubechies 已经证明，为了构造一个具有 P 阶消失矩的小波基，尺度滤波器组的长度不能少于 $2P$ 。Daubechies 滤波器组都具有 $2P$ 的长度，具有 P 阶消失矩。其它几大类如：双正交 Biorthogonal 小波基系列，

Coiflets 小波基系列，Symlets 小波基系列，都具有较高阶的消失矩。从随后的论述可知，分析突变信号时，为了能够有效地检测出奇异点，所选的小波基必须具有足够高的消失矩。

1.3 正则性

正则性表现为小波基的可微性。在数学上，设 $f(x)$ 在点 x_0 的 Lipschitz 指标为 α ，正则度定义为 α 的上确界。

Mexican hat 小波基、Meyer 小波基都是无限可微的，因此满足 $\Psi(t) \in C^\infty$ ；Daubechies 小波基，对于大的阶 P ，其正则度大约为 $0.2P$ ，满足 $\Psi(t) \in C^{0.2P}$ 。

连续可微的小波基对于在小波变换中有效地发现信号的奇异点是必要的，对于大部分正交小波基正则性越高就意味着更高的消失矩。

1.4 对称性

对称或反对称的尺度函数和小波函数是非常重要的，因为可以构造紧支的正则小波基，而且具有线性相位。在信号分析中，尺度函数和小波函数中又能够作为滤波函数，如果滤波器具有线性相位，则能避免信号在小波分解和重构时的失真。

Daubechies 已经证明，除了 Harr 小波基，不存在对称的紧支正交小波基。而对于双正交小波基，可以合成具有对称或反对称的紧支撑小波基。

图 1 为 daubechies 5 小波基的时频图；下面列举了该小波基的各种性质。daubechies 5 小波基的各种性质。

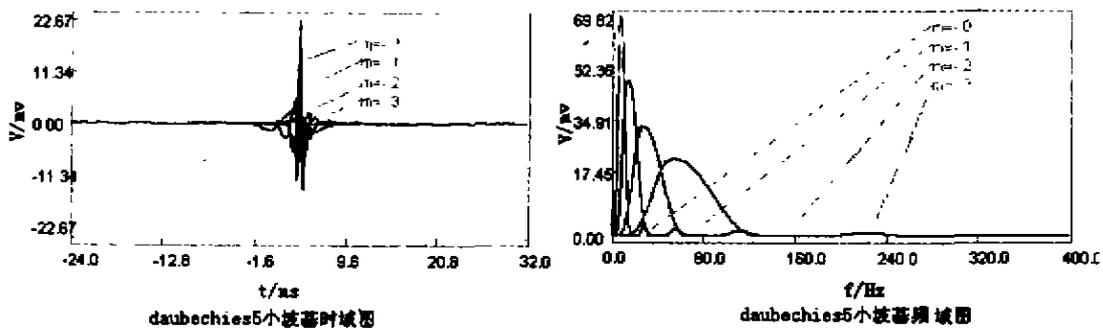


图 1 daubechies 5 小波基时频图

正交性：正交小波基；滤波器组长度：10；紧支区间： $[0, 10]$ ；消失矩阶数：5；正则度：1；对称性：不对称。

由重庆大学测试中心研制的小波变换信号分析仪实现了一个小波基库，列举了常用小波基的特征参数，具有很好的参考价值^[1-3]。

2 突变信号的小波变换性质

信号的突变有两方面的含义：一是位移的急剧变化，二是频率的急剧变换，因此信号的突变要从两方面进行刻划：

- (1) 确定信号的突变时刻(奇异性)；

(2) 区分不同的突变类型(奇异指标)。

从时间一位移曲线上可以识别一些大的突变,但是当突变信号被淹没在其它信号(如干扰和噪声)中时,突变时刻就很难确定。此外,时间一位移曲线上也很难区分奇异类型。

从信号的频谱曲线上,也可以看到一些突变时刻的信息,例如脉冲波具有宽谱的特征。但是频谱曲线没有时间概念,不可能给出突变时刻的信息。

突变信号的刻划有赖于这两者的有机结合。如果信号的频谱有时间局部性,就可以考虑观察给定时刻的频率分析,同时又可随着时间的推移追踪信号的频率特性的演变情况,这正是小波方法所追求的目标。

2.1 奇异点位置的确定

小波变换一个显著的特点是能够确定被分析信号的局部奇异性。Grossmann^[4]系统地论述了如何利用小波变换检测奇异点位置。

设一个光滑的函数 $\theta(x)$, 满足下面的条件:

$\theta(x) = O(1/(1+x^2))$ 和 $\int_R \theta(x)dx \neq 0$, 并且定义

$$\theta_s(x) = 1/s\theta(x/s)$$

定义两小波函数

$$\Psi^1(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}, \Psi^2(x) = \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \quad (5)$$

那么对于 $f(x) \in L^2(R)$, 其小波变换为

$$W^1 f(s, x) = f * \Psi^1_s(x) = s \frac{d}{dx} (f * \theta_s)(x) \quad (6)$$

$$W^2 f(s, x) = f * \Psi^2_s(x) = s^2 \frac{d^2}{dx^2} (f * \theta_s)(x) \quad (7)$$

$f * \theta(x)$ 起着光滑化 $f(x)$ 的作用。对每一尺度 s , $W^1 f(s, x)$ 、 $W^2 f(s, x)$ 分别正比于 $f * \theta(x)$ 的一阶微分和二阶微分。图2直观地表示了它们之间的关系。

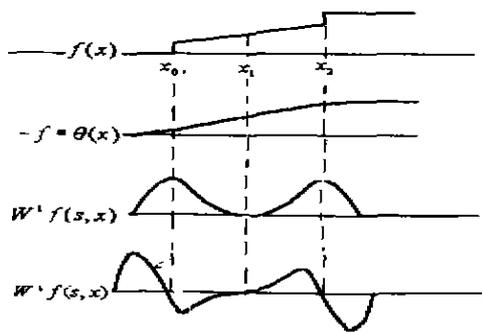


图2 $f(x), f * \theta(x), W^1 f(s, x), W^2 f(s, x)$ 关系图

由图2可知, $f(x)$ 上的奇异点, 通过运算, 在 $W^1 f(s, x)$ 上表现为极大值, 而在 $W^2 f(s, x)$ 为过零

点, 因此确定奇异点的位置就可转化为求 $W^1 f(s, x)$ 的极大值或 $W^2 f(s, x)$ 的过零点。从图可以看出, 求解 $W^1 f(s, x)$ 的极大值更为方便。

$W^1 f(s, x)$ 的极大值随着 s 具有传递性。更精确地, 下面的定理证明: 如果小波变换在更小的尺度上不存在局部模极大值, 那么在该领域不可能有奇异点。

定理1(Mallat^[5]) 假设 $\Psi(x) \in C^n$ 并具有紧支集。 $\Psi(x) = (-1)^{\theta(n)}(x)$, 其中 $\int_R \theta(x)dx \neq 0$; 设 $f(x) \in L^1[a, b]$, 如果存在一个尺度 $s_0 > 0$, 在 $x \in [a, b], s < s_0, |Wf(x, s)|$ 没有局部大值, 那么对于任意 $\epsilon > 0, f(x)$ 在 $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ 内一致 Lipschitz n 。

这个定理表明, 奇异点的存在与每一个尺度都具有模极大值相关, 一般情况, 由尺度从大到小, 模极大值点会聚为奇异点, 构成一条模极大值线。下面的图3说明了这种现象。

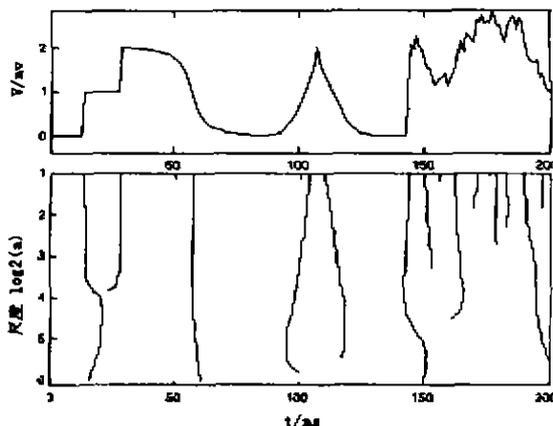


图3 模极大值与信号奇点的关系

2.2 奇异指标的计算

在数学上, 函数的奇异性是通过 Lipschitz 指标度量的, 设 n 为一个正整数, 并且 $n \leq a \leq n + 1$, 一个函数在点 x_0 称为 Lipschitz a , 当且仅当存在两个常数 A 和 $h_0 > 0$, 一个 n 阶的多项式 $P_n(x)$, 对于 $h < h_0$ 有

$$|f(x_0 + h) - P_n(h)| \leq A |h|^a \quad (8)$$

如果 $f(x)$ 在 x_0 点不是 Lipschitz 1, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点是奇异的。

如何利用小波变换, 确定 $f(x)$ 在点 x_0 的奇异性指标, mallat 给出了详细的论证。

如果小波基具有紧支撑, 那么 $Wf(s, x_0)$ 的值依赖于 $f(x)$ 在其领域的值, 其领域的大小正比于尺度 s 。因此在小的尺度上, 小波变换结果提供了 $f(x)$ 的局部信息。

小波基 $\Psi(x)$ 连续可微, 并且是紧支撑的, 那么下

面定理成立:

定理2 设 $f(x) \in L^2(R)$, $[a, b] \in R$, $0 < \alpha < 1$; 对于任意 $\varepsilon > 0$, $f(x)$ 在 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ 一致 Lipschitz α , 当且仅当对于 ε , 存在一个常数 A_ε , 对于 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ 和 $s > 0$ 有

$$|Wf(s, x)| \leq A_\varepsilon s^\alpha \quad (9)$$

为了扩展定理2使之在 Lipschitz 指标 α 大于1的情况成立, 必须要求小波基 $\Psi(x)$ 具有足够阶的消失矩。如果 $\Psi(x)$ 具有 n 阶消失矩由(9)可以推导出^[4]: 对于 $\alpha < n$

$$|Wf(s, x)| \leq A_\varepsilon s^\alpha \quad (10)$$

定理2 给出一个区间而不是一个点的奇异性指标特征。下面的定理可以精确到一个点 x_0 。

定理3 设小波基具有 n 阶消失矩, 并且 n 阶可微, 具有紧支撑。 n 为正整数, $\alpha < n$, $f(x) \in L^2(R)$, 如果在 x_0 的领域内和所有的尺度, 有在一个常数 A 满足:

$$|Wf(s, x)| \leq A(s^\alpha + |x - x_0|^\alpha) \quad (11)$$

则 $f(x)$ 在点 x_0 为 Lipschitz α 。

定理2 和定理3 表明, 小波变换特别适于评估信号的局部奇异性。

综合2.1 和2.2 的论述可以知道, 信号奇异点分布在模极大值线上, 并且其 Lipschitz 指示 α 不等于1。突变信号表现出信号的奇异性, 其 Lipschitz 指标 $\alpha > 0$ ^[5], 因此可以用小波变换进行检测分类。

设 x_0 为信号 $f(x)$ 的局部奇异点, 则在该点处 $f(x)$ 的小波变换取得模极大值。在离散二进子波变换中, (11) 式变为

$$|W_2^j f(s, x)| \leq K(2^j)^\alpha (1 + |x - x_0|^\alpha) \quad (12)$$

这里 j 为二进尺度参数, x 取离散值, 由(12)式可得

$$\log_2 |W_2^j f(x)| \leq \log_2 K + \alpha j + \log_2 (1 + |x - x_0|^\alpha) \quad (13)$$

如果信号在 x_0 处的奇异性指标大于零, 那么由(13)式知随着尺度 j 的增加, 小波变换模极大值的对数也变大。但若信号具有负的奇异性指标, 则情况是相反的。负的奇异性意味着信号具有比不连续更差的奇异性, 这就是白噪声的情况。

对于白噪声, 可以证明它是一个几乎处处奇异的随机分布且具有负的奇异性指数 $\alpha = -\frac{1}{2} - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ ^[5], 因此随着尺度增大, 白噪声的模极大值将迅速减小。

3 分析突变信号时小波基的选择

小波分解通过把信号在小波基上展开后, 将其分

解到不同的频带上。实际上, 信号的小波分解(小波级数)是一种无限和式, 由于采样频率以及计算机的限制, 往往将这个和式截取到某个期望尺度而得到信号的一个近似表示, 这个信号的近似优劣程度完全依赖于小波基的选择, 如何合适的小波基, 在不同的应用领域有着不同的要求。

在机械故障诊断中, 当机械运行发生故障时, 其振动信号往往是首先出现相应的瞬态脉冲, 能否及时准确地予以捕捉分析, 常常是能否及时发现故障、采取相应对策, 避免出现重大损失的先决条件。利用小波变换从纷杂的信号中, 提取故障特征的信息。是因为小波变换具备以下两个功能。

(1) 小波变换能够有效地侦查出故障点及故障特征;

(2) 小波变换能把各种干扰噪声滤去, 消除它们的影响。

在选择小波基时, 应该从以上两点出发, 确定最合适的小波基。

目前自适应小波基选择的研究方兴未艾。然而小波变换中小波基一经选定, 在整个过程中都不能改变, 因此无法随着信号变化而选择不同的波基。一般情况下, 只能根据不同应用领域的特点确定小波基。

检测突发信号的小波基, 可按以下四个条件考虑:

- (1) $\Psi(t)$ 有紧支集;
- (2) $\Psi(t)$ 连续可微;
- (3) $\Psi(t)$ 有 N 阶消失矩;
- (4) $\Psi(t)$ 具有对称性。

如同时满足条件(1)~(4)的正交小波基是函数奇异性分析的有力工具。

前面论述了不同小波基的特征, 因此基于上述四个条件可以得到选择小波基的一般方法。

紧支小波基是首要选择, 由其时频特征可知当紧支集的长度增加, 将 $\Psi(\omega)$ 看成带通滤波器时的通频带宽减小, 分辨能力提高, 因此可通过改变支撑集的大小来调整通频带的带宽。在选择小波基的时候, 紧支撑区间越大, 反映局部性态的能力就越强, 为了有效地确定突变点, 应该选择支撑区域大的; 然而, 紧支撑区间过大, 会增加小波变换的计算量, 因此需要根据实际情况合理选择。

小波基消失矩必须具有足够的阶数, 前述已经说明, 消失矩阶数与 Lipschitz 指标密切相关, 为了有效地突出信号的各种奇异性特征, 一定的阶次是必要的。突变信号 Lipschitz 指标一般在 $(0, 1)$ 内^[5], 因此为了分析突变信号, 消失矩的阶数也不能太高, 过高的阶数将

使分析结果模糊。而且消失矩阶数与紧支撑区间相关,过高的阶数将增加计算量。后面的仿真分析可以说明这个问题。

小波基的正则性反映了连续可微的要求,因此也必须得到满足,一般来说足够的消失矩能够保证其正则性要求。

对称性要求可以放宽,如果为了保证信号的精确重构,可以选取双正交小波基。在分析突变信号时,我们更关心其奇异性的位置,一般不要求信号重构。

综合上述,在机械故障诊断中为了有效地分析其突变信号,在选择小波基时,主要满足定区间的紧支撑和足够的消失矩阶数,这样能有效地消除噪声,发现奇异点^[6]。

4 实验验证

为了验证不同的小波基对检测信号奇异点和去噪的有效性,构造一个实验信号。下式表示的是一个隐藏在正弦信号深处的奇异信号:

$$x = \sin 20\pi t + 0.01\delta(t, t_0) \quad (14)$$

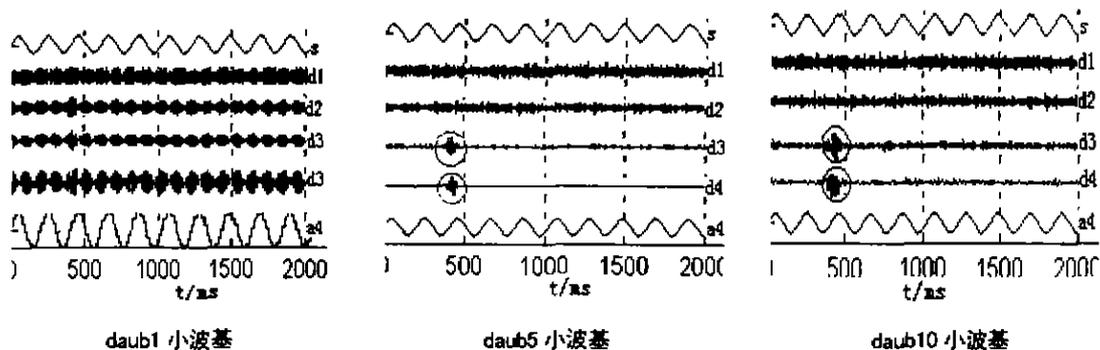


图4 实验信号的小波变换结果

从图4中可以看出,daub5的分析结果最清晰,daub10次之,而daub1(haar)根本无法分辨出奇异点的位置。daub1小波基之所以最差的一个主要的原因是其不具有连续可微性,而且紧支撑和消失矩都小,不足以发现奇异点;而daub10具有足够的正则性,其支撑区间和消失矩都最大,可以分辨出奇异点,但由于消失矩阶次太高,使得分析信号的高阶奇异性也凸现出来了,模糊了突变信号的特征。以上仿真结果可以看出,选择适当的支撑区和消失矩阶数是非常重要的。

5 结论

信号的奇异点检测和去噪具有非常实际的用途,小波变换由于其时-频局部化特征,非常适合突发信

式中 $\delta(t, t_0)$ 为持续时间很短的脉冲信号,它可表示为:

$\delta(t, t_0) = 1$, 当 $t = t_0$ 时; $\delta(t, t_0) = 0$, 当 $t \neq t_0$ 时。另外再用白噪声函数产生一个白噪声,其幅值与脉冲信号同数量级,由此得到一个实验信号 $x(t)$ 。

对于同一类小波基系列,选择有代表性的daub1、daub5、daub10三种小波基。其主要特征如表1。

表1 小波基时频特征

小波基	滤波器组长度	支撑区间	消失矩阶数	对称性
daub(haar)	2	[0,2]	1	对称
daub5	10	[0,10]	5	不对称
daub10	20	[0,20]	10	不对称

Daubechies系列小波基是典型的具有紧支光滑的正交小波基,其它几大类如:双正交Biorthogonal小波基系列,Coiflets小波基系列,Symlets小波基系列,都是由Daubechies小波基系列推广、引伸得到的。因此以Daubechies小波基系列作为分析的小波基,其结果是有代表性。

号的识别,但是在进行小波变换时,应该选取具合理的紧支撑区间阶消失矩的小波基,以提高识别的分辨率,同时也充分地滤除各种干扰,有效地达到目的。

参考文献:

- [1] QING SHUREN. The research of wavelet transform analysis system for engineering signals[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000,13(2): 419-423.
- [2] QING SHUREN. Sampling principle and technology in wavelet analysis for signals[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1998, 11(4): 259-263.
- [3] 秦树人, 汤宝平, 陈志奎, 等. 工程信号小波变换分析仪系统的研究[J]. 中国机械工程, 1999, 10(4): 443-446.
- [4] AROOMSMAN A, MORLET J. Decomposition of Hardy

functions into square integrally wavelets of constant shape [J]. SIAM J. Math, 1984,15,723-736.

[5] MALLET S,HWANG W L. Singularity Detection and processing with wavelets[J]. IEEE Transaction on information

theory ,1992,38(2):617-643.

[6] 谭善文,秦树人,汤宝平.小波分析突发故障中小波基的选择[J].振动、测试与诊断,2000,20(增刊):98-100.

Time-frequency Characteristic of Wavelet Base and Its Application Transient Signal Detection

TAN Shan-wen , QIN Shu-ren , TANG Bao-ping
(Test Center of Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: The application of wavelet analysis in fault diagnosis is growing rapidly. There are many different wavelet base to use but no accepted procedure for choosing among them, the analysis results by using them have great difference. This paper describes the significant properties of wavelet base, and analysis behavior of transient signal in wavelet transform, result on some methods for how to choose wavelet base in analysis transient signal.

Key words: wavelet transform; characteristic of time-frequency; fault diagnosis

(责任编辑 成孝义)

* * * * *

(上接 8 页)

Study on Heating of Ring Reducer

ZHU Cai-chao , QIN Da-tong , RAN Zhen-ya , SUN Shi-ya
(The State Key Laboratory of Mechanical Transmission of Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: The single-ring, double-ring, three-ring and four-ring reducers are new kind of gear drive developed in the past decade. Adopting the new conception of "parallel and movable axis" of multiple mechanisms, this kind of gear drive has many characteristic such as simplicity and compactness in structure, large transmission ratio, high efficiency and so on. As the three-ring reducer has been invented only for ten years, up to now the design of the gear drive is only made with analogue method, no design theory can be followed, there exist serious vibration and noise in transmission, which limit its wide application in industry. On the base of the principle of transmission and basic configuration of single-ring, double-ring, three-ring and four-ring reducer, the problem about heating of ring reducer and the primary reason and the part which result in heating are discussed. Moreover, the result is tested through the corresponding experiment and the concrete measure about resolving the heating problem is put forward. It is proved that the measure can commendably resolve heating of ring reducer and extend the using life of epicyclic bearing and the ring reducer. So it has important theoretic sense and engineering practical value.

Key words: reducers; principle of transmission; heat

(责任编辑 成孝义)