

文章编号:1000-582x(2001)02-0096-05

# 骨组织流动电势数值分析<sup>\*</sup>

李德源<sup>1</sup>, 刘占芳<sup>2</sup>, 张湘伟<sup>1</sup>

(1. 汕头大学机电系, 汕头 515063; 2. 重庆大学工程力学系, 重庆 400044)

**摘要:** 作者引入基于混合物理论的两相多孔介质模型来描述骨内固体骨质变形、骨液流动以及骨内流动电位间的耦合效应。采用 Galerkin 加权残值法推导出有关流动电位分布的有限元公式并编制了相应的计算机程序。算例表明, 骨组织在外界作用下产生变形, 引起骨液流动, 从而使带电粒子在孔隙间运动, 引起流动电位。

**关键词:** 多孔介质; 加权残值; 动电现象

**中图分类号:** R 318.01

**文献标识码:** A

骨的力电性质 (electromechanical behaviour) 也称为骨内应力产生电位的现象—SGP (stress-generated potentials)。近年来 SGP 现象也引起广泛注意, 并产生了关于 Wolff 功能适应定律作用机理的假设 (Wolff 定律的基本内容是骨内应力状态决定骨的重建)。进而大家认为既然应力产生的电位促进骨重建, 是否不加应力而外加电信号也将引起细胞反应达到促进骨重建的目的, 若假设成立, 在临床方面尤其在治疗骨折方面是很有意义的<sup>[1]</sup>。基于这种假设和应用前景, 国内外对 SGP 现象已进行了广泛的研究。SGP 不同于体内生物电 (心电、脑电和肌电等), 它和体内新陈代谢无关, 只和骨的化学成分、物理结构和几何结构有关。

Salzstein<sup>[2,3]</sup> 针对浸泡在液体中的 4 点弯曲梁试件, 所加载荷为正弦激励时, 微管中沿梁的厚度方向的压力分布和流动电位理论和实验研究。而对于具有一般几何形状和边界条件的骨骼来说, 要计算其在动载荷作用下的流动电位 (streaming potential), 数值计算无疑是有效的方法。作者基于混合物理论基础上的现代两相多孔介质模型, 并引入 Grodzinsky 的动电现象模型, 采用 Galerkin 加权残值法推导出相应的有限元计算公式。

## 1 两相多孔介质及动电现象模型

采用现代两相多孔介质力学模型, 将考察骨骼的骨质和骨液限定在小变形、不可压缩及等温范围内, 设固体骨质连接、各向同性、线弹性、孔间液体为无粘性流体, 忽略外部体积力, 场方程可写成如下形式:

$$\nabla \cdot (\varphi^s \mathbf{u}^s + \varphi^f \mathbf{u}^f) = 0 \quad (1)$$

$$\rho^s \ddot{\mathbf{u}}^s = \nabla \cdot \mathbf{T}_c^s - \varphi^s \nabla p + a_v \cdot (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) \quad (2)$$

$$\rho^f \ddot{\mathbf{u}}^f = -\varphi^f \nabla p - a_v \cdot (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) \quad (3)$$

本构方程:

$$\mathbf{T}_c^s = 2\mu^s \mathbf{E}^s + \lambda^s (\mathbf{E}^s \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} \quad (4)$$

$$\mathbf{E}^s = \frac{1}{2} (\text{grad} \mathbf{u}^s + \text{grad}^T \mathbf{u}^s)$$

上式中  $\dot{\mathbf{u}}^s$ 、 $\dot{\mathbf{u}}^f$  和  $\ddot{\mathbf{u}}^s$ 、 $\ddot{\mathbf{u}}^f$  分别描述多孔固体骨质和孔间液体的速度和加速度, 而  $\mathbf{u}^s$  和  $\mathbf{u}^f$  分别表示多孔固体骨质和孔间液体的位移。 $\rho^\alpha$  ( $\alpha = s$  固体相,  $\alpha = f$  液体相) 为表观密度,  $\varphi^\alpha$  为体积分数 (两相满足饱和约束条件:  $\varphi^s + \varphi^f = 1$ ),  $\mathbf{T}_c^s$  为多孔固体骨质的有效应力,  $a_v$  为扩散阻力系数,  $p$  为液体压力。

采用 Grodzinsky<sup>[4]</sup> 建立的连续型动电现象模型:

$$\varphi^s (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) + K_{11} \nabla p + K_{12} \mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

$\mathbf{E}$  为流动电场的电场强度,  $K_{11}$  为达西渗透系数,  $K_{12}$  为动电耦合系数。

问题的边界条件和初值条件为:

边界条件:

\* 收稿日期: 2001-01-08

基金项目: 重庆市科委院士基金资助项目 [重科委 98(19)号]

作者简介: 李德源 (1965-), 男, 四川隆昌人, 博士。研究方向为生物力学。

$$u^f = \hat{u}^f \text{ on } \Gamma_{u^f} \quad (6a)$$

$$u^f = \hat{u}^f \text{ on } \Gamma_{u^f} \quad (6b)$$

$$t^f = \hat{t}^f \text{ on } \Gamma_t \quad (6c)$$

$$t^f = \varphi^f p n \text{ on } \Gamma_f \quad (6d)$$

初始条件:

$$u^f(0) = u_0^f, u^f(0) = u_0^f \quad (7a)$$

$$\dot{u}^f(0) = \dot{u}_0^f, \dot{u}^f(0) = \dot{u}_0^f \quad (7b)$$

$$\ddot{u}^f(0) = \ddot{u}_0^f, \ddot{u}^f(0) = \ddot{u}_0^f \quad (7c)$$

场方程(1~5)和边界条件(6)及初始条件(7)即构成了描述骨质变形、骨液流动与动电电场分布耦合问题的一组完整的控制方程,用数值法求解这组方程,就可获得相应的动力响应和电场分布。

## 2 罚有限元公式

采用 Galerkin 加权残值法推导有限元平衡方程,为此,在连续平衡方程(1)中引入一罚参数  $\beta$ ,使其成为:  $p = -\beta \nabla \cdot (\varphi^f \dot{u} + \varphi^f u^f)$  (8) 当  $\beta \rightarrow \infty$  时,方程(8)与(1)等价,将其代入(2)、(3)式,可消去压力  $p$ 。设边界条件(6a)和(6b)为强制满足在边界条件,(6c)和(6d)为自然边界条件,假设  $W^s, \bar{E}^s, W^f, \bar{E}^f$  分别为多孔固体骨质和孔间液体运动方和自然边界条件的权函数,则相应的加权残值表达式为:

$$\begin{aligned} & \int_v W^s \cdot [\nabla \cdot T_s^e - \varphi^f \nabla p + \alpha_v \cdot (\dot{u}^f - \dot{u}^s) - \rho^f \ddot{u}^f] dv + \\ & \int_{\Gamma_f} \bar{E}^f \cdot (\hat{t}^f - t^f) d\Gamma + \\ & \int_v W^f \cdot [-\varphi^f \nabla p - \alpha_v \cdot (\dot{u}^f - \dot{u}^s) - \rho^f \ddot{u}^f] dv + \\ & \int_{\Gamma_f} \bar{E}^f \cdot \varphi^f (\hat{p} - p) n d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

离散积分区域,对骨质及流体的位移、速度、加速度进行插值,矩阵表达为:

$$\begin{aligned} \{u^s\} &= [N] \{u_n^s\}, \{\dot{u}^s\} = [N] \{\dot{u}_n^s\}, \{\ddot{u}^s\} = [N] \{\ddot{u}_n^s\} \\ \{u^f\} &= [N] \{u_n^f\}, \{\dot{u}^f\} = [N] \{\dot{u}_n^f\}, \{\ddot{u}^f\} = [N] \{\ddot{u}_n^f\} \end{aligned} \quad (10)$$

采用 Galerkin 法,取  $\{W^s\} = [N] \{W_n^s\}$ ,  $\{W^f\} = [N] \{W_n^f\}$ ,  $\{W_n^s\}$ ,  $\{W_n^f\}$  为单元  $n$  的任意系数。单元应变分量和体积膨胀量可表示为:

$$\{\epsilon_n^s\} = [B] \{u_n^s\} \quad \{\epsilon_n^f\} = [L][B] \{u_n^f\} \quad (11)$$

对于三维问题,  $[L] = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ ,  $[B]$  为应变-位移矩阵。注意,此处  $\{\epsilon_n^s\}$  为工程应变列向量。

略去推导过程,最后可得:

$$\begin{aligned} [M_n^s \ 0] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_n^s \\ \ddot{u}_n^f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [A_n \ -A_n] \\ [-A_n^T \ A_n] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_n^s \\ \dot{u}_n^f \end{Bmatrix} + \beta \begin{Bmatrix} (\varphi^f)^2 C_n & \varphi^f \varphi^s C_n \\ \varphi^f \varphi^s C_n & (\varphi^s)^2 C_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n^s \\ u_n^f \end{Bmatrix} + \\ [K_n \ 0] \begin{Bmatrix} u_n^s \\ u_n^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_n^s \\ f_n^f \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} [M_n^s] &= \int_{v_n} \rho^s [N]^T [N] dv \\ [M_n^f] &= \int_{v_n} \rho^f [N]^T [N] dv \\ [A_n] &= \int_{v_n} \alpha^n [N]^T [N] dv \\ [f_n^s] &= \int_{\Gamma_f} [N]^T \{\hat{t}\} d\Gamma \\ [C_n] &= \int_{v_n} [N]^T [D_1] [B] dv \\ [f_n^f] &= \int_{\Gamma_f} [N]^T \varphi^f \hat{p} |n| d\Gamma \\ [K_n] &= \int_{v_n} (\lambda^s [B]^T [D_1] [B] + \mu^f [B]^T [D_2] [B]) dv \end{aligned} \quad (13)$$

$$[D_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

方程(12)对积分区域中所有单元求和,得系数方程:  $[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{f\}$  (14) 式中,  $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$  和  $\{f\}$  为相应单元矩阵和向量的组集。方程(14)即为描述骨流固耦合的罚有限元公式。

求解系统方程(14),流体压力  $p$  可按下列方法得到,由(8)式:

$$\begin{aligned} p &= -\beta [\nabla] (\varphi^f [N] \{\dot{u}_n^s\} + \varphi^s [N] \{\dot{u}_n^f\}) = \\ &= -\beta [\nabla] [L][B] (\varphi^f \{u_n^s\} + \varphi^s \{u_n^f\}) \end{aligned} \quad (15)$$

式中, [L] 和 [B] 矩阵如前面所定义。

同时, 由方程(5), 由于骨液流动所形成的流动电场强度可确定如下:

$$E = [\varphi^f \dot{u}^f - \dot{u}^f] + K_{11} \nabla p / K_{12} = \{K_{11} \beta [\nabla]^T [\nabla] (\varphi^f [N] \{\dot{u}_n^f\} + \varphi^f [N] \dot{u}_n^f)\} / K_{12} - [\varphi^f ([N] \{\dot{u}_n^f\} - [N] \dot{u}_n^f)] / K_{12} \quad (16)$$

求解(15)、(16) 即可得到骨内流体压力场以及流动电场。

### 3 算例

1982年, Gross 和 William<sup>[5]</sup>; 1983年, Pienkowski 和 Pollack<sup>[6]</sup>; 1987年, Salzstein<sup>[3]</sup> 等学者对牛胫骨在4点弯曲下的流动电位进行了实验研究。为了验证所引入的计算骨流动电位模型及所导的有限元公式和编制的程序的适用性, 用所编制的程序对上述学者所做实验进行了二维有限元计算, 图1所示为有限元网格和4点弯曲骨试件的约束和载荷信息, 共划分了200个单元, 246个节点。材料参数为:  $E^f = 2.0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu^f = 0.30$ ,  $\varphi^f = 0.90$ ,  $\varphi^s = 0.10$ ,  $\rho^f = 2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho^s = 930 \text{ kg/m}^3$ ,  $a_v = k_{11} = 1.57 \times 10^{-8} \text{ m}^4/\text{N} \cdot \text{s}$ ,  $K_{12} = -1.98 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ 。

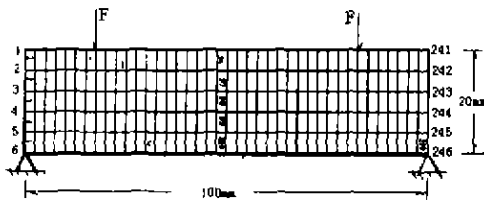


图1 二维有限元网格

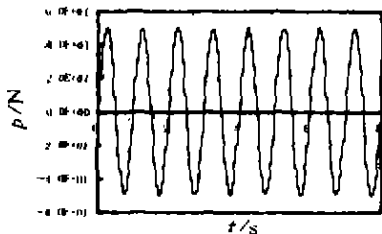


图2 交变载荷形式

考察交变载荷作用下, 图1所示纯弯曲梁试件中点上、下边流动电势的响应及其随交变载荷频率的变化。图2是交变载荷的形式, 图3是各种频率交变载荷下流动电势计算结果, 交变载荷分别为0.25 Hz、0.5 Hz、1 Hz、2 Hz时, 响应幅值为4.67 mV、8.61 mV、13.6 mV和17.7 mV, 可见其响应幅值随载荷频率增加而增加, 同时可明显看出, 其响应相对载荷有较大的相位差。图4表示了响应幅值随载荷频率变化的关系即其动态特性, 与 Salzstein<sup>[7]</sup>(1987) 的实验结果是相符的,

即随载荷频率增加, 流动电位响应的相位差逐渐减小。与幅值载荷频率的变化趋势刚好相反。

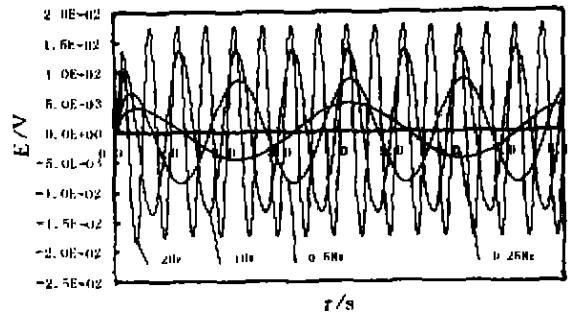


图3 各种频率载荷作用下势差对比

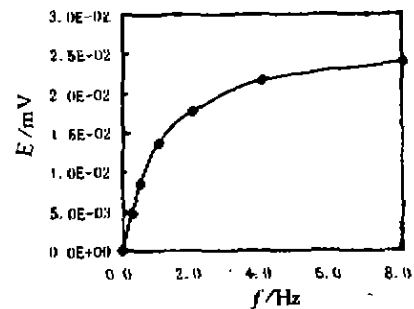


图4 骨试件的动态特征

### 4 小结

骨组织受到外界作用时, 产生变形, 而骨质的变形将引起骨液有骨孔隙间流动, 从而带动带电离子随骨液流动, 形成流动电位。如果变形不随时间而变, 骨液流动将停止, 流动电位也将随之消失。算例数值计算与实验的结果在变化规律和趋势上相符, 说明基于混合物理论的两相多孔介质模型和所引入的动电模型可以解释湿骨中骨质变形、流体流动与流动电位间的耦合效应。

### 参考文献:

- [1] 侯振德, 高瑞亭. 骨的力电性质[J]. 力学进展, 1995, (25): 85-101.
- [2] SALZSTEIN R A. Electromechanical potentials in cartilage bone - I. A continuum approach[J]. J Biomech, 1987, 106: 261-270.
- [3] SALZSTEIN R A. Electromechanical potentials in cortical bone - II, experimental analysis[J]. J Biomech, 1987, 20: 261-280.
- [4] GRODZINSKY A J. Electromechanical and physicochemical properties of connective tissue[J]. CRC Crit Rev Biomed Engng, 1983, 9: 133-199.
- [5] GROSS D, WILLIAMS W S. Streaming potential and the electromechanical response of physiologically moist bone[J].

