

文章编号:1000-582x(2001)03-0001-04

离散傅立叶变换(DFT)计算中一些问题的论证

钟佑明, 汤宝平, 秦树人

(重庆大学机械学院测试中心, 重庆 400044)

摘要:在时频信号分析领域中,DFT是一个常见的术语,尤其是在它的高效算法FFT出现以后,信号分析中的其他运算也常常尽可能转化为DFT以提高运算速度。但作者在开发虚拟频谱分析仪中了解到,对DFT及其逆变换(IDFT)的计算存在着两套公式,导致不同信号分析人员,或不同时频信号分析仪计算出的DFT结果不一致,其物理意义也不分明。作者首先阐述了以前文献中定义DFT时所依据的周期延拓原理,然后分别用待定系数法和类比演变法论证了在周期延拓原理的认识下,DFT的计算公式采用式(3)更具合理性,指出并纠正了以前诸多文献中定义DFT计算公式时,推导过程中存在的一个不当之处,对以前认为DFT及其IDFT的计算存在着两套公式是一种习惯的不恰当观点加以了澄清,最后以三个算例直观地验证了作者观点的正确性。

关键词:离散傅立叶变换;有限长数字信号;周期延拓原理

中图分类号: O 174.2

文献标识码: A

DFT是数字信号分析与处理中基本的时-频变换,基于DFT的快速傅立叶变换(FFT)在工程中已大量使用,并有现成的程序。但作者在开发虚拟频谱分析仪中了解到目前关于DFT及其逆变换IDFT的计算存在着两套公式:在大多数数字信号分析的文献^[1~3]中给出的DFT和IDFT公式为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi kn/N) \quad (1)$$

$$x(n) = 1/N \left[\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(j2\pi kn/N) \right] \quad (2)$$

在文献^[4,5]中给出的公式为:

$$X(k) = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi kn/N) \quad (3)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(j2\pi kn/N) \quad (4)$$

其中, $n, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

容易证明^[6],这两套公式是成对的,即每套公式中正变换成立,则逆变换也一定成立,反之亦然(因此,下面只讨论DFT)。它们的差别仅仅是一个系数,前者将之放在DFT中,后者将之放在IDFT中。这种差

别在数学领域中是容易接受的,但在工程领域中,同一问题存在两个计算公式是难以理解的。由于DFT两套计算公式的长期并存,也使得目前不同信号分析人员,或不同时频信号分析仪计算出的DFT结果不一致,其物理意义也不分明。针对这些问题,作者查阅了文献,在此提出一些个人的见解与同行讨论。

1 定义DFT计算公式所依据的周期延拓原理

DFT针对的是有限长数字信号的傅立叶变换或傅立叶时频分析问题。但以前的傅立叶变换是定义在整个时间轴上的,而且一般针对的是连续信号,在此基础上如何给出有限长离散信号的傅立叶变换即DFT的计算形式呢。以往多数信号分析文献中是按如下所述进行分析的^[7]:

对时间函数和频率函数的关系按连续性或离散性分为4种情况:连续时间与连续频率,离散时间与连续频率,连续时间与离散频率和离散时间与离散频率。由傅立叶级数知,连续周期时间函数对应离散非周期频率函数;由傅立叶变换知,连续非周期时间函数对应连续非周期频率函数;可见周期性与时函数或频率

• 收稿日期:2001-03-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(59875090)

作者简介:钟佑明(1970-),男,四川荣县人,重庆大学博士研究生。主要从事虚拟仪器和信号分析方面的研究。

函数的连续性或离散性有关:周期对应离散,非周期对应连续,因而推知,离散非周期时间函数对应连续周期频率函数;离散周期时间函数对应离散周期频率函数。在这一推断下,提出对有限长数字信号作周期延拓处理,即将有限长数字信号作周期延拓变成周期信号,从而利用傅立叶级数导出计算有限长数字信号傅立叶变换(DFT)的公式,作者称这样导出DFT的依据为周期延拓原理。这一原理已为一般信号分析人员所认同,因为在这一原理下,对周期时域信号和周期频域信号都只需在其中的一个有限周期上进行分析或运算,而不会损失任何信息,这正是工程信号分析和处理中所希望的。

2 周期延拓原理下DFT的计算公式

2.1 用待定系数法导出DFT的计算公式

基于周期延拓原理,可用待定系数法导出DFT的计算公式。对以 $x(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$)为周期的一般的周期序列,设其线性组合具有形式

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(j2\pi kn/N) \quad (5)$$

由于序列 $\varphi_k(n)$ 仅在 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 的范围内取值,所以式(5)中 k 的取值范围是 $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。在式(5)中依次取 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$,得 N 个关于 $X(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$)的 N 元方程,组成关于 $X(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$)的 N 元方程组,利用 $\exp(j2\pi n/N)$ 的正交性

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp(j2\pi kn/N) = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

能够唯一解出式(3)。

2.2 用类比和演变的方法导出DFT的计算公式

在2.1中,解是唯一的,那为什么会出现计算公式(1)呢。作者对此作了探索,发现在较多信号分析文献中采用的是以下导出DFT计算公式的过程或类似过程:

连续周期时间函数的傅立叶变换(实为傅立叶系数)为

$$X(kf_1) = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x(t) \exp(-j2\pi kf_1 t) dt \quad (7)$$

离散非周期时间函数的傅立叶变换为

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \exp(-j2\pi n f T_s) \quad (8)$$

因而离散周期时间函数的傅立叶变换为

$$X(kf_1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) \exp(-j2\pi nkT_s f) \quad (9)$$

由式(8)导出式(9)的理由是,根据前面的论述,离散周期时间函数对应离散周期频率函数,因而在式(8)中对时间函数和频率函数分别以一个周期代替即得式(9)。式(7)、(8)、(9)中 $f_1 = 1/T_1$ 是离散频率间隔, T_s 是离散时间间隔, $T_s f_1 = 1/N$,于是由式(9)就可导出公式(1)。但这一类推的过程有一个小的缺陷,因为离散周期时间函数对应离散周期频率函数并不意味着在式(8)中的取值范围可用 $0 \sim N$ 代替。事实上,将式(8)中 n 的取值范围从 $-\infty \sim \infty$ 改为 $0 \sim N$ 意味着将时间序列 $x(nT_s)$ ($-\infty < n < \infty$)在 $0 \sim NT_s$ 之外的值视为0,这仍然是非周期时间序列,没有得到周期时间序列的傅立叶变换。

事实上,如果不从式(8)出发,直接从式(7)出发,用类比和演变的方法很容易推导出DFT的计算公式。原因是:两者都是周期时域信号,而积分是离散的极限情况。因此如对式(7)作如下类比和演变:

$$T_1 \rightarrow NT_s, \int_{T_1} \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1}, t \rightarrow nT_s, dt \rightarrow T_s$$

即得

$$X(kf_1) = \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) \exp(-j2\pi kf_1 nT_s) T_s =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) \exp(-j2\pi kf_1 nT_s) =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) \exp(-j2\pi kn/N)$$

这正是式(3)。

3 就DFT两套计算公式并存原因的讨论

由以上分析可以认为,DFT两套计算公式并存的原因之一是有些推导过程的不完善。也有一些文献在周期延拓原理下,导出有限长数字信号的傅立叶变换计算形式为式(3),但仍采用式(1)作为DFT的计算公式,认为这只不过是一种习惯。这在数学领域中是容易接受的,但在工程领域中就容易引起混淆。尤其是现在DFT应用已远远超出时频变换的范围,如果认为工程中进行DFT时常采用计算公式(3)是一种习惯,就难以解释在其它运算中DFT应采用何种形式。所以,作者认为DFT及其IDFT的计算存在两套公式是一种习惯的观点是不恰当的。

4 算例

下面用算例验证,在周期延拓原理下,DFT计算

公式(3)的合理性。

例 1 正弦信号 $x(t) = \sin(2\pi ft)$, 其离散形式 $x(n) = \sin(2\pi n/M)$, 式中 M 是正弦信号每周期采样点数。以下分别按式(1)、(3) 绘出 $x(n)$ 的离散频谱(如图 1), 其中, 频谱的幅值指 FFT 频谱的绝对幅值, 即虚、实部矢量和的模, N 表示采样点数, $f_k = k/N$ 。

既然有限长数字信号是看作以这段信号为周期的周期序列进行处理的, 所以对正弦信号, 只要采样的时窗长是正弦信号一个基本周期的倍数, 无论是 1 个基本周期, 2 个基本周期, 还是 3 个基本周期, 实际处理的都是同一正弦序列如图 2。

因而它们的频谱应相同, 图 1(b) 正反映了这一点, 而图 1(a) 则没有。

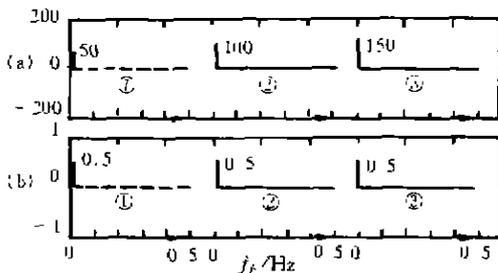


图 1 时窗长为正弦周期的倍数, 分别按式(1)、(3)计算的离散频谱

- ① $M = 100, N = 100$, 时窗长: 1 个正弦周期
- ② $M = 100, N = 200$, 时窗长: 2 个正弦周期
- ③ $M = 100, N = 300$, 时窗长: 3 个正弦周期

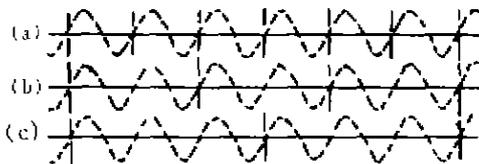


图 2 计算机实际处理的都是周期为 2π 的正弦序列

- ① 时窗长为 1 个正弦周期(2π)
- ② 时窗长为 2 个正弦周期(4π)
- ③ 时窗长为 3 个正弦周期(6π)

上图中用虚线表示离散序列(下同)。

例 2 在例 1 中, 如果采样的时窗长不是正弦信号一个基本周期的倍数, 得到的结果如图 3 所示。

图 3(b) 3 个频谱与图 1(b) 相似且各不相同, 因为

这时它们处理的序列虽与正弦序列有部分联系但不再是正弦序列, 也不是同一周期序列。各次实际处理的是如图 4 所示的不同周期序列。

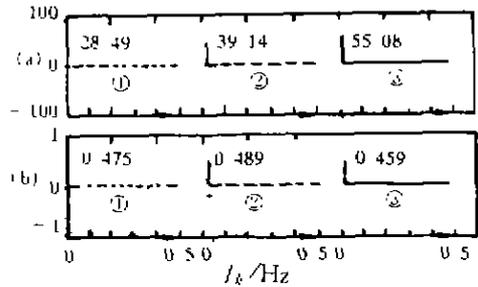


图 3 时窗长不是正弦周期的倍数, 分别按式(1)、(3)计算的离散频谱

- ① $M = 100, N = 60$, 时窗长: 0.6 个正弦周期
- ② $M = 100, N = 80$, 时窗长: 0.8 个正弦周期
- ③ $M = 100, N = 120$, 时窗长: 1.2 个正弦周期

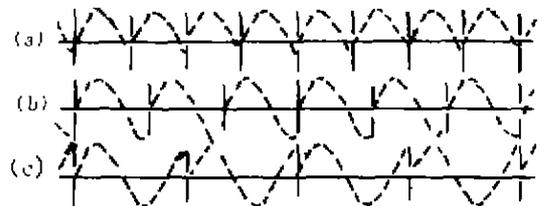


图 4 计算机实际处理的是周期各不相同的非正弦周期序列

- ① 时窗长为 0.6 个正弦周期(1.2π)
- ② 时窗长为 0.8 个正弦周期(1.6π)
- ③ 时窗长为 1.2 个正弦周期(2.4π)

例 3 单边指数信号

$$x(t) = \begin{cases} \exp(-t) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

其离散表达式为

$$x(n) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{n}{M}\right) & n > 0 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases} \quad (M \text{ 为采样率})$$

因为离散可以看着是对连续的采样, 考察采样信号位于时间 $[0, 10]$ 秒内的一段情况 (N 表示采样点数):

表 1 中, 各次采样都可以看着是从如图 5 所示的同一周期信号的一个周期中抽取的。由表中可以得出, 按式(3) 计算, 随着时间分辨率的提高, 频率的绝对幅值接近连续情况的频率绝对幅值:

表1 两种DFT计算公式的比较

序号 d	M	N	时窗(s)	按式(1)计算的幅值				按式(3)计算的幅值			
				0 Hz	0.1 Hz	0.2 Hz	0.3 Hz	0 Hz	0.1 Hz	0.2 Hz	0.3 Hz
1	10	100	[0,10]	9.51	8.05	5.92	4.46	0.095 1	0.080 5	0.059 2	0.044 6
2	20	200	[0,10]	19.50	16.51	12.12	9.14	0.09 5	0.082 6	0.060 7	0.045 7
3	30	300	[0,10]	49.50	41.91	30.82	23.20	0.099	0.084	0.061 6	0.046 4

0 Hz 0.1 Hz 0.2 Hz 0.3 Hz
0.1 0.084 7 0.062 3 0.046 9

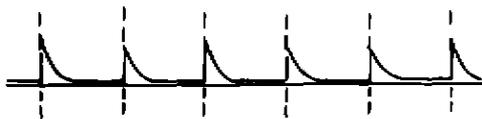


图5 以 $x(t) = \exp(-t)$ ($0 \leq t \leq 10$) 为基本周期的周期信号而按式(1)计算得不到这样的结果。

3 结束语

本文针对目前信号分析领域中DFT两套计算公式并存的原因进行了分析,并论证了在周期延拓原理下,DFT的计算公式采用式(3)更具合理性。作者还就一些文献中的观点提出了一些个人见解,其正确与

否愿与同行讨论。

参考文献:

- [1] 刘松强. 数字信号处理系统及其应用[M]. 北京:清华大学出版社,1996.
- [2] 王世一. 数字信号处理(修订版)[M]. 北京:北京理工大学出版社,1997.
- [3] 程佩清. 数字信号处理教程[M]. 北京:清华大学出版社,1995.
- [4] PETER KRANIAUSKAS. Transforms on Signals and systems[M]. The Great Britain, William Clowes Ltd, Beccles, Suffolk,1992.
- [5] [美]A. V. 奥本海姆 著. 钱忠良,徐建勋,陈孝裕 et al 译. 信号与系统[M]. 杭州:浙江科学技术出版社,1991.
- [6] 邓必鑫. 信号分析基础[M]. 北京:北京理工大学出版社,1993.
- [7] 郑君里,杨为里,应启珩. 信号与系统[M]. 北京:高等教育出版社,2000.

Some Discussion On the Calculation of the Discrete Fourier Transform(DFT)

ZHONG You-ming, TANG Bao-ping, QIN Shu-ren

(Test Center, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: In the field of signal analyses for time-frequency, the DFT is a familiar term. Especially, when its efficient algorithm FFT given, the other operations in signal analyses are also usually translated to DFT as soon as possible so as to enhance the calculating speed. But in our exploring the virtual instrument for time-frequency analyzing, two sorts of formulas to calculate DFT and its inverse transform (IDFT) are found. These results are in different value of operation from different signal analysts or from different instruments for time-frequency analyzing, their physical meaning are also not clear enough. The period extent theory some previous document based on when defined DFT is firstly expatiated. Then, separately with future defining coefficient method and analogy-evolvment method, the authors argue that, based on the period extent theory, it is more rational to calculate DFT with the formula given. A shortage is pointed out and corrected is appeared in some previous documents when having given the formula of DFT. The improper view is also clarified that the reason why there are two sorts of formulas is make by custom. The rationality of the authors view with three examples is visually verified in the end.

Key words: the discrete fourier transform; limited digital signal; the period extend theory

(责任编辑 成孝义)