

文章编号:1000-582x(2001)04-0026-05

Wigner 分布干扰项抑制及其算法

纪跃波, 秦树人, 汤宝平

(重庆大学机械工程学院测试中心, 重庆 400044)

摘要: Wigner 分布是一种真正意义上的时频分析方法, 但存在其固有缺陷即虚假时频谱(干扰项)问题。将实信号转化成所对应的解析信号, 并采用 Choi-Williams 方法对 Wigner 分布进行修正, 实现了对干扰项的有效抑制, 获得了满意的信号时频谱。给出了用解析信号计算信号 Wigner 分布及 Choi-Williams 分布算法。通过几个典型信号(分段多分量信号, 调频信号等)对所研制的软件进行仿真实验, 结果与理论相符, 表明了软件算法的正确性。

关键词: 时频分析; Wigner; Choi-Williams; 解析信号; 故障诊断

中图分类号: TH 113.1 TH 115.21

文献标识码: A

工程上存在大量非平稳信号, 如语音、音乐、地震波、生物电信号、齿轮箱、轧钢机振动信号等, 在不同的时刻, 信号具有不同的谱分量。傅里叶变换对这类信号的处理已无能为力。借助短时傅里叶变换虽然可以处理这类信号, 然而由于测不准原理的限制, 在实际问题面前, 因时间和频率分辨力的矛盾, 使得选择合适的窗函数变得十分困难。小波变换由于采用柔性窗, 时间和频率分辨力的矛盾得以调和, 但小波变换实质上是一种时间—尺度分析, 虽然小波包分析可以相对提高频率分辨率, 但得到的仍然只是窄带信号, 无法准确得到单一频率信息^[1,2]。Wigner 分布在选择窗函数方面则不存在这些问题。但它也有一个固有的缺陷即干扰项问题。采用解析信号可以消除 Wigner 分布中的部分干扰项, 但当信号所含分量较多时, 大量的干扰项仍可以淹没 Wigner 分布中时频平面上的有用信息。采用数字滤波提取单个信号分量实现 Wigner 分布的办法对齿轮箱进行故障诊断, 取得了一定效果, 但是当信号频率波动规律比较复杂时, 也无法取得预期的分析效果^[3]。即使这种方法有一定效果, 它也将破坏多分量信号在时频平面上所呈现的“全息”时频谱, 对去掉干扰项也只是一种权宜的方法。在多分量信号的 Wigner 分布中, 干扰项虽是无法避免的, 但已经研究了多种可抑制或削弱它们的方法, Choi-Williams 方法就是非常有效的一种。本文著者根据这一方法研

制的一套分析软件, 可以有效地揭示信号完整的时频构造, 为信号时频分析提供了一种有效的工具。

1 Wigner 分布及其干扰项^[4,5]

Wigner 分布(WD)是 Wigner 于 1932 年在量子力学的研究中引入。后由 Ville 将其引用至信号分析, 但直到八十年代中期才逐渐为从事信号处理的人们所熟悉。

信号的 Wigner 分布可解释为表示信号能量随时间和频率分布的一个函数。

信号 f 和 g 的互 Wigner 分布定义为

$$W_{fg}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\omega\tau) f(t + \tau/2) g^*(t - \tau/2) d\tau \quad (1)$$

信号 f 的自 Wigner 分布定义为

$$W_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\omega\tau) f(t + \tau/2) f^*(t - \tau/2) d\tau \quad (2)$$

称两个函数为 Wigner 分布。其中 $f^*(t)$ 和 $g^*(t)$ 分别表示 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的共轭。

实际信号分析时, 只能取有限长度的样本信号进行分析, 因此需要对信号做加窗处理, 这样得到的分布称为伪 Wigner 分布(PWD), 是 WD 的近似表示。

对有限带宽信号, 若采样间隔取为 $T = 1$, 且对称

· 收稿日期: 2001-03-05

作者简介: 纪跃波(1969-), 男, 福建省同安人。集美大学讲师, 重庆大学博士生。主要从事时频分析、虚拟仪器技术和理论的研究。

窗具有长度 $M = 2L - 1$, 当 $|k| \geq L$ 时, $w(k) = 0$, 则 PWD 的离散计算式为

$$PWD(n, \pi m/M) = 2 \sum_{k=0}^{M-1} \exp(-jkm \cdot 2\pi/M) p(k) f(n+k) f^*(n-k) \quad (3)$$

式中 $p(k) = w(k)w^*(k)$ 是窗函数。

现考虑多成分信号的 Wigner 分布。假定 $f(t)$ 是 n 个成分之和

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)$$

从互 Wigner 分布定义可推出

$$W_f(t, \omega) = \sum_{k=1}^n W_{f_k}(t, \omega) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1, l \neq k}^n 2Re\{W_{f_k, f_l}(t, \omega)\} \quad (4)$$

式(4)包含 n 个信号项和 C_n^2 个干扰项。对两信号 $f(t)$ 和 $g(t)$, 干扰项 $I_{f,g} = 2 \cdot Re\{W_{f,g}(t, \omega)\}$ 。假定 W_f 和 W_g 存在于 (t, ω) 平面域中点 (t_f, ω_f) 和 (t_g, ω_g) 的邻域内, 则干扰项存在于中心点 $(t_m, \omega_m) = ((t_f + t_g)/2, (\omega_f + \omega_g)/2)$ 的邻域内。它提供了虚假的谱值分布, 影响了 Wigner 分布的物理解释。

2 Wigner 分布算法及信号仿真实验

2.1 Wigner 分布算法

由于实信号的频谱包括信号中每个物理频率对应的正负频率部分, 致使其所含信号分量为有物理意义的信号分量的两倍。如果直接采用实信号进行 WD 分析, 我们将得到包括所有正负频率分量信号项及它们所产生的大量交叉项(干扰项)。对复杂的实信号, 我们将难以识别其 WD 分布中有物理意义的谱分布。

由于解析信号的频谱只含其对应实信号的正频率部分, 因而采用解析信号计算信号 Wigner 分布, 可以减少 Wigner 分布干扰项。

获取实信号所对应的解析信号可以采用如下两种方法:

- 1) 以实信号为实部, 以实信号的希尔伯特变换作虚部构成的复信号即为实信号所对应的解析信号。
- 2) 将实信号作 FFT 变换, 取其正频率部分乘 2 后作 IFFT 变换, 所得结果即为实信号所对应的解析信号。

本程序采用第二种求解析信号的方法。

根据(3)式, 采用解析信号计算 Wigner 分布的算法如下:

- (1) FFT 计算长度 N 的确定

根据数据长度 L , 计算满足不等式 $2L \leq 2^m$ 的最小整数 m 。令 $N = 2^m$ 作为 FFT 计算长度。

- (2) 求解析信号 x (长度为 L), 分为实部 xr 与虚部 xi 序列。

- (3) 求解析信号的共轭 cx , 分为实部 cxr 与虚部 cx_i 序列。

- (4) 信号序列末端相应补零, 使总长度为 N 。

- (5) 令 $r(\tau, t) = cx(t-\tau/2) \cdot x(t+\tau/2)$

作离散化处理, t 对应整数 n , $\tau/2$ 对应整数 m 。以下是一段求 $r(\tau, t)$ 对应离散值的 C 语言源代码:

```
for(n = 0; n < L; n++)
for(m = max(-n, -(L-1) + n); m < min(n, L-1-n); m++)
{m1 = m + (m < 0) * N;
r[n][m1] = cx[n-m] * x[n+m];
```

- (6) 对上面得到的 $r[n][m1]$ 作 FFT 变换: $\sum r[n][m1]^* \exp(j \cdot 2\pi i / N \cdot km1)$, 取计算结果的实部作为信号 Wigner 分布。

理论上这是多余的, 因为根据(2)式, 任何信号的 Wigner 分布计算结果都应实数。但由于对信号做了截断并离散化处理, 以及计算机计算时难以避免的计算误差可能导致出现虚部, 所以这里强调取计算结果的实部为信号的 Wigner 分布。

- (7) 实际上, 上一步得到的是 $1/2WD(n, k^* \pi/N)$ 。故取

$$WD(n, k^* \pi/N) = 2 \sum r[n][m1]^* \exp(j \cdot 2\pi i / N \cdot km1)$$

- (8) 将值为 $(N/2 \sim N)$ 之间的 k 映射为 $(-N/2 \sim 0)$, k 的范围变为: $-N/2 \sim N/2 - 1$ 。由于采用解析信号计算, 计算结果只有正频率谱分量, 故只需取 $k = 0 \sim N/2 - 1$, 作出 $WD(n, k^* \pi/N)$ 分布图。

2.2 仿真实验

对以上程序做如下仿真实验, 仿真信号分别为分段多分量信号、调频信号、调幅信号。

```
1) 分段多分量仿真信号为
Signal[i] = 15 * sin(2 * PI * 50 * i/2000)
i = 10 ~ 110;
Signal[i] = 10 * sin(2 * PI * 371 * (i-200)/2000)
i = 200 ~ 300;
Signal[i] = 10 * sin(2 * PI * 171 * (i-400)/2000)
i = 400 ~ 500;
Signal[i] = 0
i 为其它值时;
```

仿真结果得到信号 Wigner 分布如图 1、图 2 所示。

2) 调频仿真信号为

$$\text{Signal}[i] = \cos(2 * \text{PI} * 350 * (0.006 * \sin(2 * \text{PI} * 5 * i/2000) + i/2000))$$

$i = 0 \sim 1000;$
 $\text{Signal}[i] = 0$
 i 为其它值时;

仿真结果得到信号 Wigner 分布如图 3、图 4 所示。

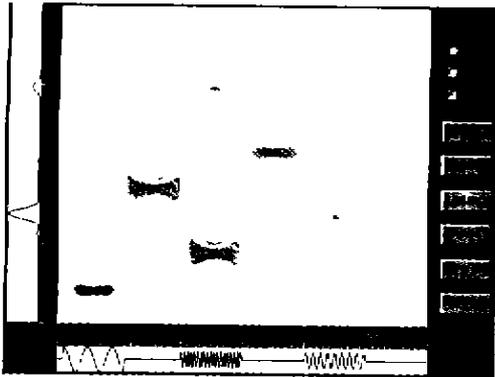


图 1 分段多分量信号 Wigner 分布时频谱

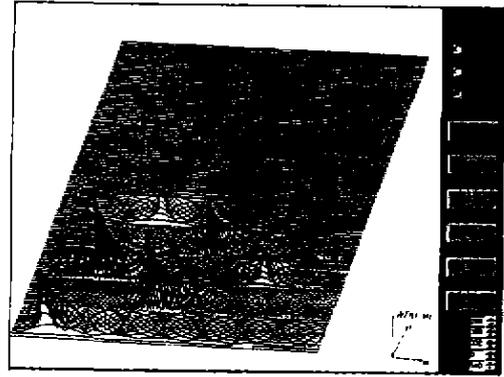


图 2 分段多分量信号 Wigner 分布瀑布图

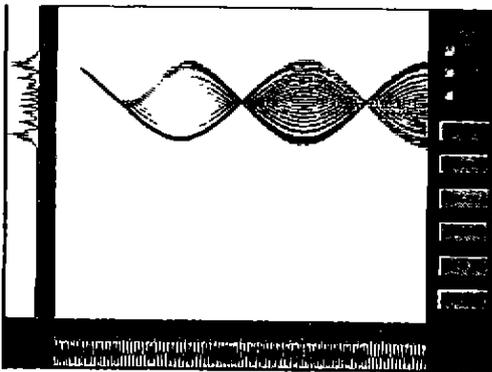


图 3 调频信号 Wigner 分布时频谱

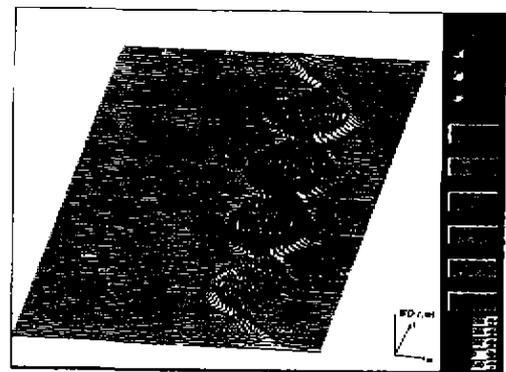


图 4 调频信号 Wigner 分布瀑布图

从图 1 ~ 图 4 可以看出,在信号各分量之间出现了干扰项,假如我们事先不了解各信号分量,将很难由 Wigner 分布图了解信号能量在时频平面上的分布。在工程实践中,信号通常都比以上所给仿真信号复杂得多,Wigner 分布中的干扰项完全有可能淹没有用信息。因此,Wigner 分布要能清晰而完整地揭示信号的时频结构,必须有效地抑制其干扰项。

3 干扰项的抑制^[6-8]

3.1 Choi-Williams 方法及程序算法

信号 f 的时频分布可以写成普遍形式,也称一般类表示:

式(5)中 $\varphi(\theta, \tau)$ 是一个称之为核(函数)的任意函数。选择不同的核函数,就能得到不同的分布,也就是说,分布的性质是由相应的核函数所决定的。

研究核函数发现,当取 $\varphi(\theta, \tau) = \exp(-\theta^2 \tau^2 / \sigma)$, 通过选择常数 σ 的大小可以控制干扰项的大小,而自谱项变化较小,这样既有效地减小了虚假谱值,而又较好地保持了自谱项的特征。具有这种核函数的 WD 又称 Choi-Williams 谱。

信号 f 的时频分布的一般类表示还有另一种形式:

$$P(t, \omega) = 1/(4\pi^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\theta, \tau) \exp(-j\theta t - j\omega \tau) d\tau d\theta \quad (6)$$

其中 $M(\theta, \tau)$ 称为特征函数,且

$$M(\theta, \tau) = A(\theta, \tau) \varphi(\theta, \tau)$$

$$A(\theta, \tau) = \int \exp(j\theta u) f(u + \tau/2) f^*(u - \tau/2) du$$

$A(\theta, \tau)$ 称为模糊度函数。

Choi-Williams 谱的算法如下:

(1) FFT计算长度 N 的确定

根据数据长度 L , 计算满足不等式 $2L < = 2^m$ 的最小整数 m 。令 $N = 2^m$ 作为 FFT 计算长度。

(2) 求解析信号 x (长度为 L), 分为实部 x_r 与虚部 x_i 序列。

(3) 求解析信号的共轭 x^* , 分为实部 x_{r^*} 与虚部 x_{i^*} 序列。

(4) 信号序列末端相应补零, 使总长度为 N 。

(5) 用 FFT 计算模糊度函数 $A(\theta, \tau)$ 。

(6) 对核函数 $\varphi(\theta, \tau)$ 进行赋值。

(7) 计算特征函数值 $M(\theta, \tau)$ 。

(8) 对 $M(\theta, \tau)$ 进行二维付里叶变换, 得到信号的 WD (Choi-Williams 谱)。

3.2 仿真实验

对如上程序进行仿真, 仿真信号与前面相同。仿真结果得到信号的 Choi-Williams 谱如图 5 ~ 图 8 所示。

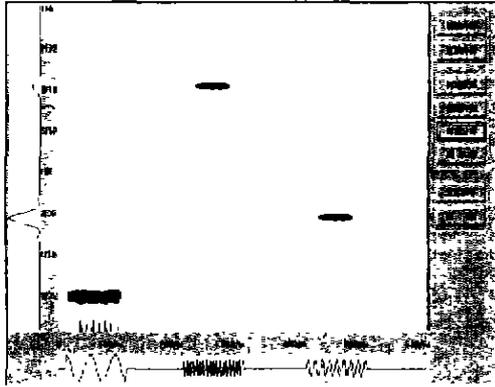


图 5 分段多分量信号 Choi-Williams 时频谱

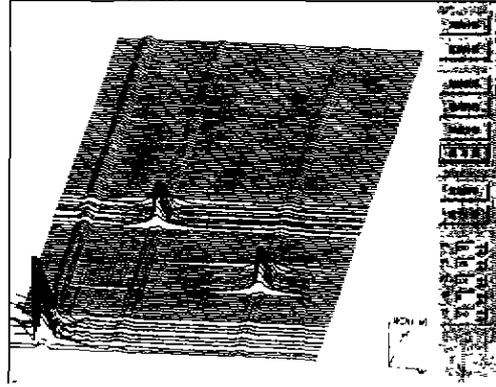


图 6 分段多分量信号 Choi-Williams 谱瀑布

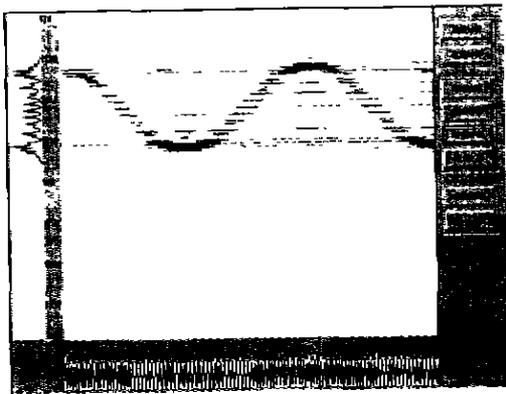


图 7 调频信号 Choi-Williams 时频谱

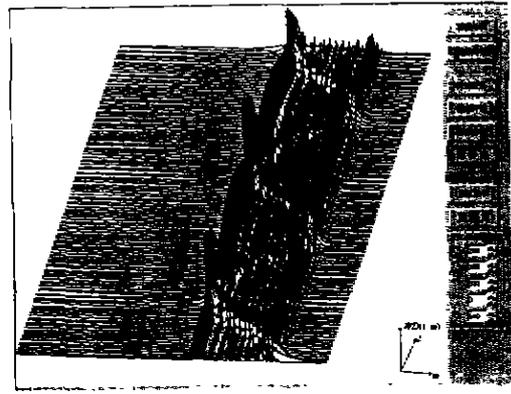


图 8 调频信号 Choi-Williams 谱瀑布图

从图 5 ~ 图 8 可见, 在图 1 ~ 图 4 中出现的干扰项几乎都被抑制了, 信号能量在时频平面上的分布很好地表示了信号的时频结构。

4 结论

Wigner 分布在表示多分量信号时频谱时, 存在严重的干扰项问题, 特别是直接用实信号本身计算其 Wigner 分布情况将更为恶化。采用解析信号替代实信号作其 Wigner 分布, 可以消除部分干扰项, 但信号比较复杂时, 仍然得不到清晰的信号时频谱。引进 Choi-

Williams 方法, 在几乎不影响信号自谱项的同时, 极大地削弱了信号在时频平面上的互谱项, 从而有效地抑制了干扰, 凸显出有实际物理意义的时频谱, 使我们得到一幅清晰而完整的信号时频谱全景图。实验表明, 本文作者研制的软件算法符合理论的要求, 取得了很好的分析效果。

参考文献:

- [1] WICKERHAUSER M V. Adapted wavelet analysis from theory to software[J]. New York: SIAM, 1994. 150-153.
- [2] MEYER Y. Wavelets: algorithms and applications[J]. New

- York: SIAM, 1993.189-195.
- [3] 王志杰. 齿轮箱振动信号时频分析与故障诊断[D]. 重庆大学硕士学位论文, 1995.
- [4] [美]L. 科恩著 白居宪译. 时-频分析: 理论与应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.
- [5] 史习智. 非平稳信号分析. 动态信号分析及其工程应用[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1994.
- [6] CHOI H I, WILLIAMS W J. Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels [J]. IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing, 1989, 35: 862 ~ 871.
- [7] J. Jeong and W.J. Williams, "A new formulation of generalized discrete-time time-frequency distribution", [J] Pro., IEEE 1991, pp. 3189 ~ 3192.
- [8] G.S. Cunningham and W.J. Williams. "High-Resolution Signal Synthesis for Time-Frequency Distribution", [J] Proc. IEEE 1993, pp. 400 ~ 403.

Repression of the Interference in the Wigner Distribution and the Algorithm

Ji Yue-bo, QIN Shu-ren, TANG Bao-ping

(Testing Center, College of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Although as being a real means of time-frequency analysis, Wigner Distribution is limited by its falsity time-frequency spectrum called interference item. By applying the analytic signal and the Choi-Williams Distribution to repress the interference and the time-frequency spectrum got is satisfactory. The algorithm to compute the Wigner Distribution and the Choi-Williams Distribution of the signal using its analytic form are presented. Testifies The algorithm through several simulation tests using some typical signals such as segmented multicomponent signal, frequency modulation signal etc. The result is consistent with the theory. It indicates that the algorithm of the software developed is accurate.

Key words: time-frequency analysis; Wigner Distribution; Choi-Williams Distribution; analytic signal; failure diagnosis

(责任编辑 成孝义)

(上接第7页)

参考文献:

- [1] 钱玉麟. 影响双辊薄带连铸薄带质量的因素[J]. 上海钢研, 1998, (1): 40-49.
- [2] 秦国友. 定量金相[M]. 成都: 四川科学技术出版社, 1987.
- [3] Toshiaki M, Ken-ichi M. Formation of Solidification Structure in Twin-roll Casting Process of 18Cr-8Ni Stainless Steel[J]. ISIJ International, 1995, 36(5): 771-777.
- [4] 余永宁, 刘国权. 体视学—组织定量分析原理和应用[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1989.

Token of Three-dimension Size of Grain in Microstructure of Twin-roll Thin Strip

YANG Ming-bo, PENG Xiao-dong, PAN Fu-sheng, DING Pei-dao

(College of Materials Science and Engineering, Chongqing University, Chongqing, 400044)

Abstract: The property and behavior of twin-roll thin strip is greatly affected by three-dimension size of columnar and equiaxed crystal grains in the solidification structure of thin strip. The growth of crystal grain has three-dimension feature during casting process of thin strip, So the token of three-dimension size of crystal grain cannot be realized by traditional token method. On the basis of assumption to crystal grain shape, the token expression of three-dimension size of columnar is established along with crystal grain in microstructure of twin-roll thin strip according to quantitative metallurgical analysis and probability theory, And quantitative discription about three-dimension growth feature of crystal grain in microstructure of twin-roll thin strip is realized.

Key words: twin-roll thin strip; solidification structure; crystal grain; token

(责任编辑 成孝义)