文章编号：1000-582x(2001)04-0071-03

Stokes 方程的边界元区域分裂算法及其应用*

袁政强[1]，谭 宏[2]，祝家麟[2]
（1. 重庆大学 土木工程学院；2. 重庆大学 数理学院，重庆 400045）

摘 要：用边界元求解不规则凹凸区域时，积分误差很大。区域分裂法是将不规则凹凸区域上的求解问题化为多个不重叠凸区域上的求解问题，在公共的边界上用 Dirichlet 条件、Neumann 条件交替迭代得到全区域上的解。该方法计算精度高、适用于并行计算。作者给出了 Stokes 方程边界元求解不规则凹凸区域的区域分裂算法，并给出了将该算法用在贵阳市阿哈水库的流场计算的算例。

关键词：Stokes 方程；边界元法；区域分裂法
中图分类号：O241.83 **文献标识码**：A

描述粘性不可压缩流体运动的微分方程是 Navier-Stokes 方程（包括连续性方程[1~2]，以下简称 N-S 方程组）。N-S 方程组中的惯性力非线性项给求解该方程组带来很大的困难。在低流速时惯性力项相对于其它项要小得多。Stokes 将惯性力项去掉，得到线性化的 Stokes 方程。湖泊流场是典型的低流速，数学模型可用 Stokes 方程描述流场运动。湖泊水域多为不规则的凹凸区域，用边界元方法求解时，凹区域会给计算带来大的误差。又由于求解边界积分方程时，直接得到的是边界量，故采用无重叠区域型更为方便。作者采用的区域分裂法[3]，将不规则凹凸区域分解为若干个子区域，大问题的求解分解为在子区域上问题的求解。

Stokes 问题的边界积分方程为：设 $\Omega \subset R^2$，它的边界 Γ 分片光滑，我们讨论的方程组为：

$$\begin{cases} -\gamma\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\,\mathrm{grad}p = f & in\Omega \\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0 & in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 γ 为运动粘性系数，$\boldsymbol{u}$，p 分别是未知速度和压力值，f 表示外部力。设 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$，考虑如下边值条件：

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}\,|_{\Gamma_1} = \boldsymbol{u}_0 & x \in \Gamma_1 \\ \boldsymbol{q}\,|_{\Gamma_2} = \boldsymbol{q}_0 & x \in \Gamma_2 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $q_i(x) = \delta_{ij}(\boldsymbol{u},p)n_j \quad n = (n_1, n_2)$ 是单位法向量，

$$\delta_{ij} = -\delta_{ij}p + 2\gamma\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}),\ \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right) \quad i,j = 1,2 \tag{3}$$

在 Γ_1 上为 Dirichlet 边界条件，在 Γ_2 上为 Neumann 边界条件。

1 Stokes 方程的边界元方法

由 Stokes 方程组的基本解和广义 Green 公式，得到边界积分方程：

$$\theta_{ki}(x)u_i(x) = -\int_\Gamma T_{ki}^* u_i \mathrm{d}\Gamma_y + \int_\Gamma E_{ki}^* q_i \mathrm{d}\Gamma_y + \int_\Omega f_i E_{ki}^* \mathrm{d}\Omega_y \tag{4}$$

其中 θ_{ki} 与 x 点边界 Γ 的光滑程度有关，如果 Γ 与 x 点处光滑，则 $\theta_{ki}(x) = \frac{1}{2}\delta_{ki}$。此式也用于计算内点处的速度值。此时取 $\theta_{ki} = I$，I 为单位矩阵。

内部点 x 处的压力值由下式计算：

$$p(x) = \int_\Omega p_k^*(x,y)f_k(y)\mathrm{d}\Omega_y + \int_\Gamma p_k^*(x,y)q_k(y)\mathrm{d}\Gamma_y + 2\gamma\int_\Gamma\left(\frac{\partial p_k(x,y)}{\partial x_j}n_j\right)u_k \mathrm{d}\Gamma_y \tag{5}$$

基本解表达式：

$$E_{ki}^*(x,y) = \frac{1}{4\pi\gamma}\left[\delta_{ki}\ln\frac{1}{r} + \frac{(x_k - y_k)(x_i - y_i)}{r^2}\right];$$

$$p_k^*(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{(x_k - y_k)}{r^2} \tag{6}$$

* 收稿日期：2001-01-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目（19171197）
作者简介：袁政强（1962-），男，湖南长沙人，重庆大学副研究员、博士生，主要从事工程力学计算和钢筋混凝土结构研究。

$$T_{ln}^{*}(x,y)=\sigma_{ij}(E_{l}(x,y),p_{l}(x,y))n_{j}=$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{(x_{l}-y_{l})(x_{i}-y_{i})(x_{j}-y_{j})}{r^{4}}n_{j}=$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{(x_{k}-y_{k})(x_{i}-y_{i})}{r^{3}}\frac{\partial r}{\partial n} \qquad (7)$$

$$r=|x-y|=\sqrt{(x_{1}-y_{1})^{2}+(x_{2}-y_{2})^{2}}$$

对方程(5)进行单元离散化处理。把边界 Γ 离散的 NBE 个单元、并用边界单元 Γ_{p}、组成的边界去近似 Γ_{n}、记 $\Gamma_{h}=\bigvee_{i=1}^{NBE}\Gamma_{hi}$，每个 Γ_{hi} 上有 NN 个配置点、整个 Γ_{h} 上有 NNB 个配置点，同时内部区域 Ω 剖分成 NVE 三角形单元 Ω_{h}、每个 Ω_{h} 内部有 NND 个配置点，整个 Ω_{h} 内部有 NNV 个配置点，对边界配置点 x_{m} 循环、依次计算每个单元上积分的贡献得到矩阵方程：

$$\sum_{n=1}^{NNB}H_{k}^{i}u_{i}^{j}=\sum_{k=1}^{NNB}G_{k}^{i}q_{i}^{j}+B^{m}$$

$$m=1,\cdots,NNB,k=1,\cdots,\mathrm{Nof} \qquad (8)$$

其中：$H_{k}^{i}=\int_{\Gamma_{hn}}\phi_{j}(y)\frac{\partial E_{ki}^{*}}{\partial n_{x}}(y-x)\mathrm{d}\Gamma_{y}$

$$G_{k}^{i}=\int_{\Gamma_{hn}}\phi_{j}(y)E_{ki}^{*}(y-x)\mathrm{d}\Gamma_{y}$$

$$B^{m}=\int\Omega f_{n}\cdot u_{n}^{*}(x_{m},y)\mathrm{d}\Omega_{y}=$$

$$\sum_{k=1}^{NVE}\int_{\Omega_{k}}f_{n}(y)\cdot u_{n}^{*}(x_{m},y)\mathrm{d}\Omega_{y}$$

u_{i}^{j}、q_{i}^{j} 单元上第 j 点第 i 方向上的函数值、函数对边界方向导数值。

其中 B^{m} 是体积分项的贡献，f_{n} 是 Ω 内部单元上的已知体积力或虚拟体积力。

引入边界条件(2)，上式成为代数方程组，一但解出，就得到边界节点上的全部速度、面力及压力值，依靠边界速度和面力就能计算出内部任点处的速度、压力和速度梯度的近似值。

2 边界元方程的区域分裂算法

Stokes 方程的边界元法在求解不规则凸区域时，能够得到很好的结果[1]，但实际问题的区域一般是不规则的凹凸区域，将不规则凹凸区域化为多块不规则凸区域时，公共边界的边界条件无法确定。重叠型区域分裂算法[2] 预先假设计算区域能按二色问题分区，即能将区域分解为不同颜色的两类区域，有公共边界的区域属于不同颜色的类。D-N 交替法是在计算第一类区域时，假定公共边界值为 D 值。通过一个区域的计算、得到此边界上 N 值。再将此 N 值作为另一个区域的边界条件、计算此区域得到 D 值。D-N 边界值的交叉迭代来校准公共边界值、达到公共边界值与内部数值的一致。具体的区域剖分是：将不规则的凹凸划分为颜色一的区域和颜色二的区域，在同一颜色类的多个区域块中没有公共的边界，公共边界只能在不同类的区域块中存在。见图 1。将区域边界分为公共边界和非公共边界。在非公共边界上，边界值条件数 KODE 的值为 0 和 1。0 代表此结点的该方向上边界值为 D 边界，1 代表为 N 边界。

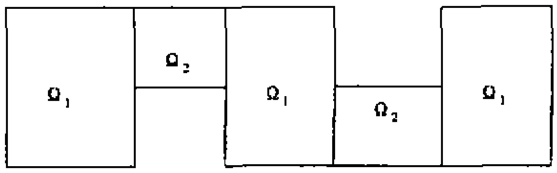

图 1 区域剖分方式图

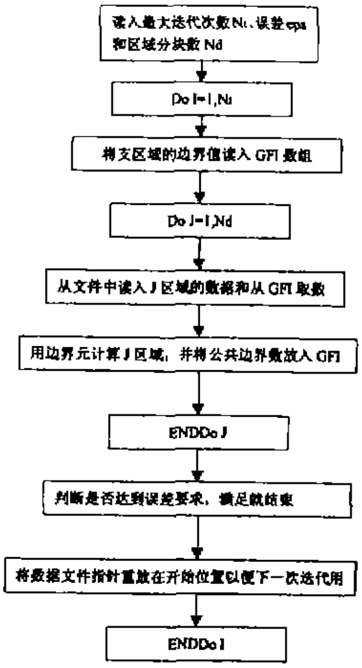

图 2 区域分裂法计算框图

将公共边界编号后，再给出分块区域的局部编号与公共边界编号的对应关系数组 INDEX(I, J)。I 是分块数，J 是公共边界的编号、INDEX(I, J) 的值是第 I 块的第 J 公共边对应的局部号。当第 J 边界与第 I 块区无公共边界时置为零。计算时先计算颜色一的区域、计算得到的边界值按数组 INDEX 的关系放置在边界值交换数组 GFI 中。计算颜色二的区域时，先将公共交换数组中的由颜色一区域计算得到的数据按 INDEX 数组的关系取出后，计算颜色二的区域。计算的结果同样放置在公共交换数组中供下次迭代时的颜色一的区域使用。计算框见图 2。

3 算例

将本方法用于贵阳市阿哈水库的流场计算中,计算时将区域分成7块凸区域,前6个是支区域,最后一个是根区域。计算剖分图和计算结果见图3和图4。

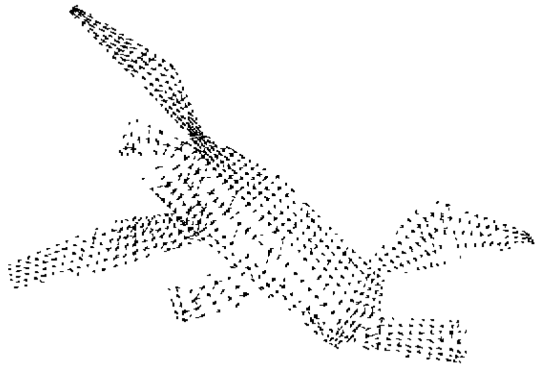

图3 区域分块剖分图

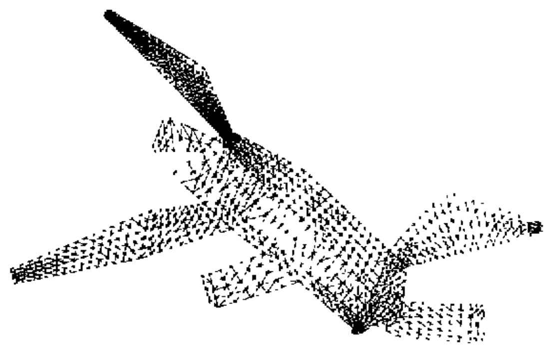

图4 流场计算结果图

采用常单元,在PⅡ350微机上编制了用上述方法计算二维定常Stokes方程组内边值问题[4]。该程序在Windows95下运行用FORTRAN语言编成。它能计算区域内任一点处的速度值和压力值,所给的边界条件中可以是第一边界条件或第二边值条件,也可以是混合边界条件。为节省存贮量,直接利用边界条件形成线性代数方程组中的系数矩阵、而不必通过先形成(8)中的H、G矩阵再来交换元素,对三角形上的非奇异积分,采用4点Guass数值求积公式,为减少计算工作量和保证边界附近的精度、对边界Γ_h上的非奇异积分,可按场点到边界单元的距离让程序自动选取Guass积分点数、对奇异积分、推导了解析积分公式、用解析方法计算。

参考文献:

[1] Zhu Jialin、Yuan Zhengqiang, Xia Junfei, Tan Hong, Boundary Element Method for Numerical Solution of Steady Navier-Stokes Equations[A].In Proc. of the 2nd Conference on Numerical Methods for Partial Diferential Equations[C], World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.1991.176-182.

[2] Zhu Jialin,The Boundary Integral Equation Method for Stationary Stokes Problems[A],in Proc.of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations[C], Ed. Feng Kang,Science Press,Beijing,1985.374-377.

[3] 吕涛,齐济民.林振宝.区域分解算法[M].北京:科学出版社.1992.

[4] 贵州省环保科研所.红枫湖水动力模型二维Navier-Stokes方程组的边界元法研究[R].重庆:原重庆建筑工程学院,1992.

Mix Domain Decomposition Method with Boundary Element Method For Stokes Equations and Application

YUAN Zheng-qiang, TAN Hong, ZHU Jia-lin
(Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: As the BEM was used in the knaggy domain, its approach error was big. Domain Decomposition Method change the problem in the knaggy domain to the problem in several convex domains which do not wrap. The whole solution is gained by alternating boundary conditions between Dirichlet condition and Neumann condition on the common boundary. Domain Decomposition Method for Stokes equations in the anomalistic knaggy domain is presented, the example of Domain Decomposition Method in the flow of the lake in GuiYang City is given.

Kewy words: stokes equations; boundary element method; domain decomposition method

(责任编辑 钟学恒)