

文章编号:1000-582x(2001)04-0091-04

松质骨粘弹性的数值分析^{*}

李德源¹,陈海斌²

(1. 汕头大学 机电系, 汕头 515063; 2. 第三军医大学 大坪医院野战外科研究所, 重庆 400042)

摘要:引入基于连续介质力学框架基础之上的现代两相多孔介质模型来描述松质骨的力学行为,对松质骨在给定恒应力和变形下的蠕变和应力松弛等与时间相关的粘弹性行为进行了研究。采用 Laplace 变换技术,得到了松质骨蠕变和应力松弛的解析结果。研究表明,由于松质骨中流体组分的扩散和流动,松质骨呈现着一种强烈的表现粘弹性行为以及能量耗散性质。

关键词:松质骨;粘弹性;多孔介质

中图分类号:R318.01

文献标识码:A

人体松质骨约占骨骼的 20%,重量较轻,具有柔韧性,又有支撑体型、负担体重的功能。松质骨外有一层密质骨的外壳,从而增加了骨骼的强度和硬度。松质骨结构疏松,当应力通过关节传递时,能吸收部分应力和能量。从 20 世纪 70 年代以来,国内外开展了对松质骨与时间相关特性的实验研究和理论分析,并取得了一些成果,如 Carter 和 Hayes 研究了松质骨的模量和强度对应变率的敏感性^[1];Pugh 等人实验研究了松质骨的粘弹性特性^[2];近期的研究指出,松质骨与密质骨有类似的蠕变特性^[3]。但是由于要取得准确形状和尺寸的松质骨试样,以及采用恰当的力学模型来描述其力学行为都比较困难,松质骨力学行为的研究相对于密质骨的研究要少得多。由于与年龄相关的骨折、假肢松弛、以及骨重建等科学和临床问题的推动,松质骨的力学特性的实验研究和理论分析近年来成为骨力学的研究焦点之一。

松质骨是一种轻质多孔的骨骼组分,类似于一种蜂窝状或海绵状的多孔固体材料。骨基质构成片状、杆状的骨小梁,骨小梁的结构特征与工程上的多孔泡沫材料骨架极为相似。在骨小梁构成的孔间,充填着可流动的骨髓。外部作用施加在松质骨上,将引起骨小梁骨架变形,造成孔间流体压力变化,驱使骨髓在孔间流动;同时,这种流动又会反作用于骨架的变形,二者是相互耦合的。必须计及固体骨质和液态骨髓之间的相互作用,才能较好的研究松质骨的力学行为。

1980 年, Mow 等^[4]基于混合物理论建立了描述关节软骨的两相多孔介质模型,很好地解释了关节软骨在压缩时表现出来的粘弹性行为。此后,该模型被广泛地运用于生物力学领域。文献^[5,6]等利用此模型对松质骨的粘弹性性质和含液相松质骨的力学参数进行了实验研究。

本研究的目的在于从固-流两相多孔介质理论出发,引入描述松质骨力学行为的数学模型,在此基础上,研究松质骨在一维压缩时的蠕变和应力松弛响应,得出的解析结果可为松质骨围限压缩实验研究和有限元等数值方法提供参考。为简明起见,所考察的问题限定在一维的、固体骨质为线弹性小变形的情况,并且将松质骨简化为一种均匀的各向同性的饱和多孔材料。

1 松质骨的两相多孔弹性模型

松质骨由多孔固体骨架和充填其间的可流动的骨髓构成,现代多孔介质的理论框架主要基于连续介质力学的方法^[6-8],这为多孔介质的理论研究提供了坚实的基础。在下面的方程中,与每种组分相关的有:表观密度 ρ^{α} ($\alpha = s$ 表示固体骨质, $\alpha = f$ 表示液态骨髓), 体积分数 ϕ^{α} (满足饱和和约束条件: $\phi^s + \phi^f = 1$), 质点速度 u_i^{α} , 质点加速度 u_i^{α} , 多孔固体骨质中的应力 T_{ij}^s , 孔隙中骨髓压力 p 。排除组分间的质量交换,并合理地假定固体骨质和孔穴内的骨髓这两种组分的材料密度保持不变,考

• 收稿日期:2001-02-13

基金项目:重庆市科委院士基金项目(渝科委 1998-93)

作者简介:李德源(1965-),男,四川隆昌人,博士,从事固体力学、生物力学研究。

察的材料限定在小变形和等温范围内,则忽略体力时质量、动量平衡方程的欧拉形式分别为:

$$\text{div}(\phi' u'_{,i} + \phi' u'_{,i}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho' u'_{,i} = \text{div} T'_e - \phi' \text{grad} p - \hat{P}'_e \quad (2)$$

$$\phi' u'_{,z} = \phi' \text{grad} p + \hat{P}'_e \quad (3)$$

上式中 u' 和 u' 分别描述多孔固体骨质和骨髓的位移。考虑线弹性的多孔固体骨质,则有效应力 T'_e 的本构方程为:

$$T'_e = 2\mu' e_s + \lambda' (e_s \cdot I) I \cdot e_s = \frac{1}{2}(\text{grad} u' + \text{grad}^T u') \quad (4)$$

式中 μ' (ϕ'_0 和 λ' (ϕ'_0) 为空的 多孔固体骨质的表观拉梅常数, e_s 是线性化的拉格朗日应变张量。此外,在等温情况下 \hat{P}'_e 表达为:

$$\hat{P}'_e = -\alpha_s (u'_{,i} - u'_{,i}) \quad (5)$$

不难看出, \hat{P}'_e 表达了固-流两相间流动的摩擦阻力,称为扩散阻力;系数 α_s 称为扩散阻力系数。对各向同性的两相多孔材料, $\alpha_s = (\phi')^2 \gamma' / k$, 这里 γ' 是孔穴中流体的比重, k 是多孔材料的水力渗透系数。此外,体积分数 ϕ' 可由 $\phi' = \phi'_0 (1 + e_s \cdot I)^{-1}$ 直接决定,既然 $e_s \cdot I \ll 1$, 则 ϕ' 在小变形范围内近似为 ϕ'_0 。

在两相饱和多孔弹性理论的框架内,方程(1)-(5)结合相应的初、边值条件就构成了描述松质骨生物力学特性的一组完整的控制方程。

2 松质骨的粘弹性响应

2.1 研究模型

松质骨的围限压缩是将松质骨试样置于一个侧壁高度润滑的压力室,在其顶部通过一块自由排水的刚性多孔板施加均匀外部作用(应力或变形,见图1)。当外部作用达到一定值时,保持其大小不变。由于侧向膨胀受到约束,变形和流动只能发生在一个方向上(例如 z 轴),因此所考察的是一维的耦合问题。令 z 轴垂直于加载边界,施加在边界上外部作用 $f(t)$ 如图2和图3所示,令一维情况下固体骨质中的有效应力用 $\sigma'_e(z,$

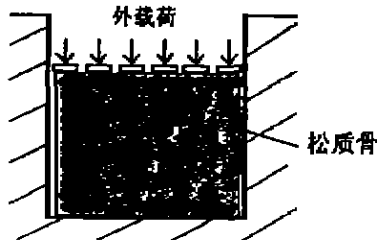


图1 松质骨围限压缩图示

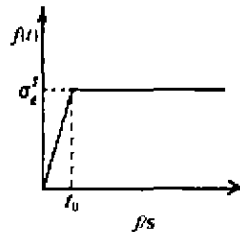


图2 蠕变问题边界作用形式

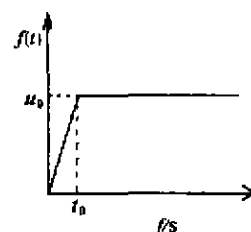


图3 应力松弛边界作用形式

$t)$ 表示。

2.2 蠕变问题

对蠕变问题,自由排水边界的加载函数为:

$$\sigma'_e(0,t) = f(t), p(0,t) = 0 \quad (6)$$

边界条件表明刚性多孔加载板具有足够充分的渗透性,保证自由流体边界。初始条件为:

$$u'(z,0) = 0, u'(z,0) = 0, u'_{,i}(z,0) = 0, u'_{,i}(z,0) = 0 \quad (7)$$

对前述控制方程(1)-(3)在一维情况下的形式进行拉氏变换,并利用初、边值条件(6)和(7),再经过反变换后整理可得蠕变问题固体骨质有效应力和液态骨髓孔隙压力的解析解为:

$$\sigma'_e(z,t) = \frac{b}{2\sqrt{a}} \int_0^t f(t-\tau) e^{-\frac{b}{2a}\tau} I_1\left(\frac{b\sqrt{\tau^2 - az^2}}{2a}\right) \frac{z}{\sqrt{\tau^2 - az^2}} H(\tau - \sqrt{az}) d\tau + f(t - \sqrt{az}) e^{-\frac{b}{2a}\sqrt{az}} \quad (8)$$

$$p(z,t) = \frac{1}{(\phi')^2(\lambda' + 2\mu')} [\phi' \rho' l_{,i}(z,t) + \alpha_s l_{,i}(z,t)] \quad (9)$$

上式中,

$$l(z,t) = \int_0^t q(t-\tau) g(z,\tau) d\tau \quad (10)$$

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^t f(t-\tau) e^{-\frac{b}{2a}\tau} I_0\left(\frac{b}{2a}\tau\right) d\tau \quad (11)$$

$$g(z,t) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{b}{2a}t} I_0\left(\frac{b\sqrt{t^2 - az^2}}{2a}\right) H(t - \sqrt{az}) - \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{b}{2a}t} I_0\left(\frac{b}{2a}t\right) \quad (12)$$

在以上表达式中, $I_0(z)$ 和 $I_1(z)$ 分别是修正的零阶和一阶贝塞尔函数, $H(t)$ 是 Heaviside 阶跃函数,两个参数 a 和 b 的形式分别为:

$$a = \frac{(\phi')^2 \rho' + (\phi')^2 \rho'}{(\phi')^2(\lambda' + 2\mu')}, b = \frac{\alpha_s}{(\phi')^2(\lambda' + 2\mu')} \quad (13)$$

2.3 应力松弛

对应力松弛问题,自由排水边界的加载函数和初

始条件为：

$$u'(0, t) = f(t), p(0, t) = 0 \quad (14)$$

$$u'(z, 0) = 0, u''(z, 0) = 0, u'_{,t}(z, 0) = 0,$$

$$u'_{,t}(z, 0) = 0 \quad (15)$$

与蠕变问题类似,对控制方程(1) - (3)在一维情况下的形式进行拉氏变换,并利用初、边值条件(14)和(15),再经过反变换后整理可得关于应力松弛问题固体骨质有效应力解析解为：

$$\sigma'_z(z, t) = -(\lambda' + 2\mu') (aM''(z, t) + bM'(z, t)) \quad (16)$$

式中：

$$M(z, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^t f(t - \tau) e^{-\frac{b}{2a}\tau} I_0 \left(\frac{b\sqrt{\tau^2 - az^2}}{2a} \right) H(\tau - \sqrt{az}) d\tau \quad (17)$$

$M''(z, t)$ 和 $M'(z, t)$ 分别表示其对时间的二阶和一阶偏导数。骨髓压力解析表达式为：

$$p(z, t) = \frac{n'\rho'}{(\pi')^2} (K''(t) -$$

$$M''(z, t)) + \frac{\alpha_2}{(\pi')^2} (K'(t) - M'(z, t)) \quad (18)$$

式中：

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^t f(t - \tau) e^{-\frac{b}{2a}\tau} I_0 \left(-\frac{b}{2a} \right) d\tau \quad (19)$$

$K''(t)$ 和 $K'(t)$ 分别表示其对时间的二阶和一阶偏导数。

在以上应力松弛响应表达式中, $I_0(z)$ 是修正的零阶贝塞尔函数, $H(t)$ 是 Heaviside 阶跃函数,两个参数 a 和 b 的形式与(13)式相同。

2.4 算例

根据上述松质骨蠕变和应力松弛中骨架应力和孔间骨液压力的表达式(式(8)、(9)、(16)和(18)),编制了相应的计算机程序,计算了相应的算例。图2和图3

为边界上所加应力和位移型式,其中, $\sigma'_z(0, t) = 6.0$ kPa, $u_0 = 2.0$ mm, $t_0 = 10.0$ s。算例中松质骨的材料参数取为: $\phi' = 0.60$, $\phi'' = 0.40$, $\rho'_s = 1.80$ g/cm³, $\rho'_f = 0.90$ g/cm³, $E^s = 63.60$ MPa, $\nu^s = 0.30$, $k = 0.01$ m/s。图4表示蠕变过程中固体骨质有效应力随时间的变化规律,表现出松质骨的波的传播特性、松质骨的表现粘弹性和能量耗散特性。起初固体表面轴向有效应力增加较快,离表面越深的地方应力增加越缓慢。在整个加载和蠕变的初始过程中应力随时间不断增大,直到最后轴向有效应力达到一稳定值,不同深度轴向有效应力值趋于一致,直至平衡。图5是孔隙间骨髓压力随时间的变化关系,在表面附近骨髓的压力在加载过程中增加较小,且与较深处压力几乎同时达到最大值,这是由流体的不可压缩性假设造成的。从图中还可以看出,在加载过程中沿深度方向压力随时间均增加,在蠕变阶段压力随时间逐渐减小,直至最后减小为零,即达到平衡状态。平衡后,流体停止流动,外加载荷全部由固体骨质承担,这时固体骨质有效应力保持不变。从图6中可以明显地观察到在松质骨表面附近的应力松弛现象。由于松质骨中液体骨髓向外流动,所以在表面附近应力峰值很快松弛,到200s左右趋于平衡态。而在较深的地方,应力明显滞后,表现出强烈的粘弹性性质,看不到应力峰值出现,无应力松弛现象。沿深度方向上各点有效应力最终趋于一致,达到平衡状态。而图7中,在松质骨表面附近,压力随加载过程增加较少,在较深的地方,由于骨髓的不可压缩假设,压力几乎同时达到最大值,且随深度的增加压力最大值趋于一致。同时,在加载过程中,压力随时间均增加,外加变形一定后,即松弛过程中,压力值随时间逐渐减小,直至达到平衡状态。在平衡状态,流体停止流动,压力为零,固体骨质中有效应力保持一定,外加载荷全部由固体骨质承担。

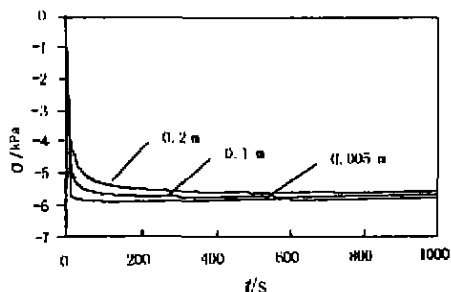


图4 蠕变过程中轴向应力随时间的变化

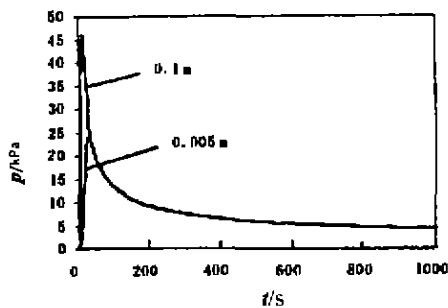


图5 蠕变过去中压力随时间的变化

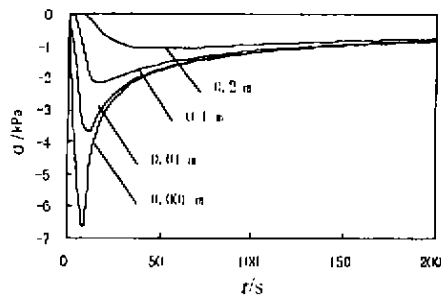


图6 应力松弛时轴向应力随时间的变化

国内郭玉明等^[4]对松质骨的蠕变和松弛等粘弹性性质进行的实验研究以及刚芹果等^[5]利用本文所采用的固液耦合模型对松质骨的压缩实验研究所得结果与上述算例所得结论是一致的,说明此模型对松质骨力学性能的研究是适宜的。

3 结束语

笔者通过对松质骨结构特征的观察,引入了描述松质骨的两相多孔弹性模型,并利用 Laplace 变换技术,对松质骨一维蠕变和应力松弛问题进行理论分析,得出了松质骨固体骨质的变形、有效应力及骨髓压力与时间的相关特性及它们之间的耦合关系。由于松质骨中流体组分的扩散和流动,松质骨呈现着一种强烈的表观粘弹性行为和能量耗散性质,松质骨中的流动机制是松质骨的表观粘弹性和能量耗散现象的根本原因。所给出的解析结果将为松质骨粘弹性实验研究及松质骨动力响应有限元分析等数值方法提供标准参考。

参考文献:

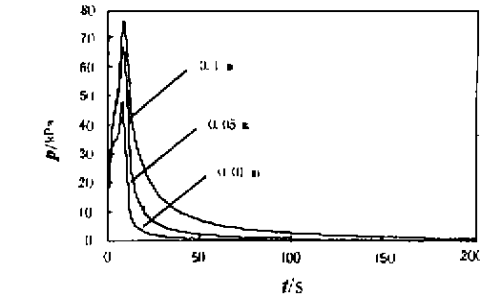


图7 应力松弛时骨髓压力随时间的变化

- [1] CARTER D R, HAYES W C. The compressive behaviour of bone as a two-phase porous structure[J]. J Bone Joint Surg, 1977, 59: 954-962.
- [2] PUGH J W, ROSE R M, RADIN E L. Elastic and viscoelastic properties of trabecular bone: dependence on structure[J]. J Biomech, 1973, 6: 657-670.
- [3] KEAVENY T M, HAYES W C. A 20-year perspective on the mechanical properties of trabecular bone[J]. J Biomech Engng, 1993, 115: 534-542.
- [4] 郭玉明, 张宏民, 朱健, 等. 松质骨粘弹性性质的实验研究[J]. 中国生物医学工程学报, 2000, 19(3): 272-275.
- [5] 刚芹果, 华筑信. 含液体松质骨的压缩实验分析[J]. 实验力学, 2000, 15(1): 56-59.
- [6] 李德源, 陈海斌, 刘占芳, 等. 直接法与统计法测试松质骨孔隙率的比较研究[J]. 第三军医大学学报, 2001, 22(2): 190-192.
- [7] MOW V C, KUEI S C, LAI W M, et al. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiments[J]. J Biomech Engng, 1980, 102: 73-84.
- [8] BOER D R. Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory[J]. Appl Mech Rev, 1996, 49(4): 201-262.

Numerical Analysis on the Viscoelastic Characteristic of Cancellous Bone

LI De-yuan¹, CHEN Hai-bin²

(1. Department of Mechanical Engineering, Shantou University, Shantou 515063, China;

2. Research Institute of Surgery, The Third Military Medical University, Chongqing 400042, China)

Abstract: A one-dimensional creep and stress relaxation response of cancellous bone to instant loading is investigated based on the studies with scanning microscope, can cancellous bone be viewed as a cellular solid consisting of an interconnected skeleton filled with medulla. A two-phase poroelastic model is introduced to describe the cancellous bone, in which the tissue (material) densities of the skeleton and medulla are assumed to be unchangeable while the corresponding apparent densities are changeable due to the change of volume fraction. The governing equations are derived for the case of a linear poroelastic solid skeleton saturated with an inviscid medulla. Under the loading, responses of the skeleton stress as well as the medullary pressure are obtained with Laplace transform technique. The computational result shows that the cancellous bone is provided with certain features similar to those appearing in viscoelastic solids, which means the responses do not only depend on time, but furthermore depend on previous loading history. It is worth paying attention to the result that the medullary pressure can be negative. This point is due to the recovery of the skeleton after unloading whereas the medulla is not squeezed out but absorbed into the pores by suction.

Key words: cancellous bone; viscoelasticity; porous medium

(责任编辑 李胜春)