文章编号:1000－582x(2001)04－0150－04

排队系统 $E_k^{\xi}/M/1$*

孙荣恒[1]，李建平[2]
（1.重庆大学 数理学院,重庆 400044;2.后勤工程学院,重庆 400041）

摘　要:研究排队系统 $E_k^{\xi}/M/1$,给出该系统的队长、忙期、等待时间的分布以及其它一些结果。

关键词:队长;忙期;等待时间
中图分类号:O 226;TB 111　　　文献标识码:A

关于排队系统的文章已经很多,但是对于 $E_k^{\xi}/M/1$ 排队系统至今进行研究得不够深入。$E_k^{\xi}/M/1$ 排队系统是这样的系统:其到达间隔时间序列 $\{T_n, n \geqslant 1\}$ 为 $i\cdot i\cdot d\cdot$ 随机变量序列,且 T_1 服从参数为 λ 的 k 阶爱尔朗分布,即 $T_1 \sim \Gamma(k,\lambda)$,每次到达 ξ 个顾客,ξ 为取正整数值的随机变量,记 $r = E(\xi)$,$r^{(i)} = E[\xi^i]$,$i = 2,3,\cdots$,系统只有一个服务台,顾客的服务时间序列 $\{B_n, n \geqslant 1\}$ 为 $i\cdot i\cdot d\cdot$ 随机变量序列,且 B_1 服从参数为 μ 的指数分布,即 $B_1 \sim \Gamma(1,\mu)$。并设 $\{T_n, n \geqslant n\}$、ξ、$\{B_n, n \geqslant 1\}$ 相互独立。

设 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 为到达过程,即 $X(t)$ 表示在时间区间 $(0,t]$ 中到达系统的顾客数;$\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为参数是 λ 的泊松过程,并用 $\bar{X}(t)$ 表示在 $(0,t]$ 中到达系统的顾客批数,Q 表示一个顾客被服务完离开系统时系统中的顾客数(队长),W 表示一个顾客的等待时间的长度(即从该顾客到达系统时起一直到他开始被服务时止这段时间)。Ⓗ 表示由一批(ξ 个)顾客引出的忙期的长度(即当系统处于闲期时、从系统开始到达一批顾客时起一直到系统中又没顾客时止这段时间),θ 表示由一个顾客引出的忙期的长(即从服务台为一个顾客服务时起一直到该顾客以及由该顾客引出的所有顾客都被服务完时止这段时间)。ξ、Q 的概率母函数(PGF)分别记为 $\xi(z)$、$Q(z)$,W、Ⓗ、θ 的拉普拉斯——司蒂阶变换(LST)分别记为 $W^*(s)$、Ⓗ$^*(s)$、$\theta^*(s)$。并设 $\delta = \dfrac{\lambda r}{ku} < 1$。

1　几个引理

引理 1　设 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k$ 为 k 个 $i\cdot i\cdot d\cdot$ 随机变量,且 $\zeta_1 \sim \Gamma(1,\lambda)$,则 $\sum_{i=1}^{k}\zeta_i \sim \Gamma(k,\lambda)$。

引理 2　设 $N(t)$ 表示在时间区间 $(0,t]$ 中到达某服务台的顾客数。$\{T_n, n \geqslant 1\}$ 为相应的顾客到达的间隔时间序列,则 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为具有参数 λ 的泊松过程的充要条件是 $\{T_n, n \geqslant 1\}$ 为 $i\cdot i\cdot d\cdot$ 随机变量序列,且 $T_1 \sim \Gamma(1,\lambda)$。

证明见[1]中第一章 § 2。

引理 3
$$P\{\bar{X}(t) = j\} = \sum_{i=jk}^{(j+1)k-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!} \tag{1}$$

证　由引理 1 知 T_1 是 k 个相互独立同服从参数为 λ 的指数分布随机变量之和,所以每批顾客必须通过 k 个介绍站(称为相位)才能到达系统,而通过每个相位的时间相互独立均服从参数为 λ 的指数分布,且当前一批顾客通过 k 个相位到达系统后才允许下一批顾客向第一个相位前进。由引理 2 知,如果把批顾客在 $(0,t]$ 中通过的相位数作为一个过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 在 $(0,t]$ 中到达的顾客数,则 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程,且 $\{\bar{X}(t) = j\} = \{jk \leqslant N(t) \leqslant (j+1)k - 1\}$,从而(1)式得证。

引理 4　设 y 表示在一个顾客的服务时间 B 中到达系统的顾客数,即 $y = X(b)$,则 y 的 PGF 为
$$y(z) = \frac{1-g^k}{1-g^k\xi(z)},\quad g = \frac{\lambda}{\lambda+u} \tag{2}$$

证　由全学期望公与引理 3,得
$$y(z) = E[z^y] = E[z^{X(b)}] = \int_0^\infty E[z^{X(t)}]\mu e^{-\mu t}\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^\infty \sum_{j=0}^{\infty} E[z^{X(t)} \mid \bar{X}(t) = j]P\{\bar{X}(t) = j\}\mu e^{-\mu t}\mathrm{d}t =$$

* 收稿日期:2000－07－21
作者简介:孙荣恒(1939－),男,江苏淮阴人,重庆大学教授。主要研究领域为概率论。

$$\int_0^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(E[z^{\xi}])^j\sum_{i=jk}^{(j+1)k-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\mu\mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}t=$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}[\xi(z)]^j(1-g^k)g^{jk}=\frac{1-g^k}{1-g^k\xi(z)}$$

引理5 设 B_-、B_+ 分别为服务时间 B 的年龄（逝去时间）与剩余服务时间（剩余寿命），则 B_-、B_+ 的 LST 为

$$B_-^*(s)=B_+^*(s)=\frac{1-B^*(s)}{SE(B)}=\frac{\mu}{\mu+s}\tag{3}$$

证明见文献[2]。

2 主要结果及其证明

定理1 Q 的 PGF 为

$$Q(z)=\frac{[1-g^k-rg^k][1-\xi(z)]}{r[1+z\xi(z)g^k-g^k-z]},g=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},\rho<1\tag{4}$$

且
$$E(Q)=\frac{2r^2g^k+(1-g^k)(r^{(2)}-r)}{2r(1-g^k-rg^k)},$$

$$g=\frac{\lambda}{\lambda+u},\rho<1\tag{5}$$

证 设 Q_n 为第 n 个顾客服务完离开系统时系统的队长，y_n 为在第 n 个顾客服务时间中到达系统的顾客数，$\{\xi_i,i\geqslant 1\}$ 为 $i\cdot i\cdot d\cdot$ 随机变量序列，且均与 ξ 同分布，并设函数 $\varepsilon(x)$ 为

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}\tag{6}$$

则有关系式：

$$Q_{n+1}=Q_n-\varepsilon(Q_n)+y_{n+1}+(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)\tag{7}$$

因为 $y_{n+1}=X(B_{n+1})$ 与 Q_n，ξ 相互独立，由引理4，Q_{n+1} 的 PGF 为

$$Q_{n+1}(z)=E(z^{Q_{n+1}})=E(z^{y_{n+1}})E[z^{Q_n-\varepsilon(Q_n)+(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)}]=$$

$$\frac{1-g^k}{1-g^k\xi(z)}\left\{\frac{\xi(z)-1}{z}P[Q_n=0]+\frac{1}{z}Q_n(z)\right\}$$

在条件 $\rho<1$ 下，令 $n\to\infty$，记

$$Q(z)=\lim_{n\to\infty}Q_n(z),P\{Q=0\}=\lim_{n\to\infty}P\{Q_n=0\}$$

得
$$Q(z)=\frac{1-g^k}{1-g^k\xi(z)}\left[\frac{\xi(z)-1}{z}P\{Q=0\}+\frac{1}{z}Q(z)\right]\tag{8}$$

解出 $Q(z)$，得

$$Q(z)=\frac{(1-g^k)P\{Q=0\}[\xi(z)-1]}{z-g^kz\xi(z)-1+g^k}\tag{9}$$

在(9)中令 $z=1$ 可得

$$P\{Q=0\}=\frac{1-g^k-rg^k}{r(1-g^k)}\tag{10}$$

将(10)式代入(9)式立得(4)式。由(4)式可得(5)式。

定理2 θ、Θ 的 LST 分别满足方程：

$$\theta^*(s)=\frac{u[(s+\lambda+\mu)^k-\lambda^k]}{(s+\mu)\{(s+\lambda+\mu)^k-\lambda^k\xi[\theta^*(s)]\}}\tag{11}$$

$$\Theta^*(s)=\xi\left\{\frac{\mu[(s+\lambda+\mu)^k-\lambda^k]}{(s+\mu)[(s+\lambda+\mu)^k-\lambda^k\Theta^*(s)]}\right\}\tag{12}$$

且
$$E(\theta)=\frac{1-g^k}{\mu(1-g^k-rg^k)},\rho<1\tag{13}$$

$$E(\Theta)=\frac{r(1-g^k)}{\mu(1-g^k-rg^k)},\rho<1\tag{14}$$

证 因为忙期与服务顺序无关所以依如下顺序进行服务。在某个顾客 A 的服务时间 B 中，可能到达系统若干批顾客。当 A 被服务完后，接着为第一批顾客服务，当第一批所有顾客以及由第一批顾客引出的所有顾客都被服务完后再为第二批顾客以及由第二批顾客引出的顾客服务，依此类推，于是有

$$\theta=B+\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{\bar{X}(B)}\tag{15}$$

其中 Θ_i 为在 A 的服务时间 B 中到达的第 i 批顾客所引出的忙期，易见 $\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3,\cdots$ 相互独立且均与 Θ 同分布。$\bar{X}(B)$ 表示在 B 中到达的批数。又因每批有 ξ 个顾客所以有

$$\Theta=\sum_{i=1}^{\xi}\theta_i\tag{16}$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots$ 相互独立且均 θ 同分布。由(15)式，得

$$\theta^*(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}E[\mathrm{e}^{-s(\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{\bar{X}(t)})}]\mu\mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{\infty}\mu\mathrm{e}^{-(s+\mu)t}\sum_{j=0}^{\infty}E[\mathrm{e}^{-s(\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_j)}]P\{\bar{X}(t)=j\}\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{\infty}\mu\mathrm{e}^{-(s+\mu)t}\sum_{j=0}^{\infty}[\Theta^*(s)]^j\sum_{i=jk}^{(j+1)k-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\mathrm{d}t=$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}[\Theta^*(s)]^j\sum_{i=jk}^{(j+1)k-1}\frac{\mu\lambda^i}{(s+\lambda+\mu)^{i+1}}=$$

$$\frac{\mu[(s+\lambda+\mu)^k-\lambda^k]}{(s+\mu)[(s+\lambda+\mu)^k-\lambda^k\Theta^*(s)]}\tag{17}$$

由(16)式得

$$\Theta^*(s)=\xi[\theta^*(s)]\tag{18}$$

将(18)式代入(17)式立得(11)式。再由(18)式与(11)式立得(12)式。

因为
$$E[\bar{X}(B)]=\int_0^{\infty}E[\bar{X}(t)]\mu\mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{\infty}\mu\mathrm{e}^{-\mu t}\sum_{j=0}^{\infty}j\sum_{i=jk}^{(j+1)k-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\mathrm{d}t=$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} j \sum_{i=jk}^{(j+1)k-1} (1-g)g^i = \frac{g^k}{1-g^k} \tag{19}$$

由(19)、(15)与(16)式,得

$$E(\theta) = \frac{1}{\mu} + E(\Theta)E[\tilde{X}(B)] =$$

$$\frac{1}{\mu} + \frac{g^k}{1-g^k}E\left[\sum_{i=1}^{\xi}\theta_i\right] = \frac{1}{\mu} + \frac{rg^k}{1-g^k}E(\theta) \tag{20}$$

由(20)式解出 $E(\theta)$ 立得(13)式。由(13)式与(16)式立得(14)式。(13)式与(14)式也可分别由(11)式与(12)式求得。

定理3 设 M 为在 θ 中服务完的顾客数,$\sum$ 为在 Θ 中服务完的顾客数,则 M、$\sum$ 的 PGF 分别为

$$M(Z) = \frac{z(1-g^k)}{1-g^k\xi[M(z)]} \tag{21}$$

$$\sum(Z) = \xi\left[\frac{z(1-g^k)}{1-g^k\sum(z)}\right] \tag{22}$$

且
$$E(M) = \frac{1-g^k}{1-g^k-rg^k}, \rho < 1 \tag{23}$$

$$E(\sum) = \frac{r(1-g^k)}{1-g^k-rg^k}, \rho < 1 \tag{24}$$

证 类似于定理2的证明,有

$$M = 1 + \sum_1 + \sum_2 + \cdots + \sum_{\tilde{x}(B)} \tag{25}$$

与
$$\sum = \sum_{i=1}^{\xi} M_i \tag{26}$$

其中 $M_1, M_2, M_3, \cdots$ 相互独立且均与 M 同分布,$\sum_1, \sum_2, \sum_3, \cdots$ 相互独立且均与 $\sum$ 同分布。从而可证定理3。

定理4 在先来后服务非抢占的情况下,一顾客的等待时间 W 的 LST 为 $W^*(s) =$

$$\frac{[1-g^k-rg^k+rg^k\theta^*(s)](s+\mu)\left[1-\xi\left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)\right]}{r(1-g^k)s} \tag{27}$$

且
$$E(W) = \frac{rg^k}{\mu(1-g^k-rg^k)} + \frac{r^{(2)}-r}{2r\mu} \tag{28}$$

证 设 A 为任一个顾客,则其等待时间 W 由两部分组成,一部分是 A 所在批(即批中第一个顾客)的等待时间 W_f,另一部分是 A 在批中的等待时间 W_s,且易见 W_f 与 W_s 相互独立,故 W 的 LST 为 W_f、W_s 的 LST 的乘积,即

$$W^*(s) = W_f^*(s)W_s^*(s) \tag{29}$$

因为 A 为所在批中任一个顾客,可以在 ξ 个顾客组成的队列中任一个位置。现依如下方法确定 A 在批队列中的位

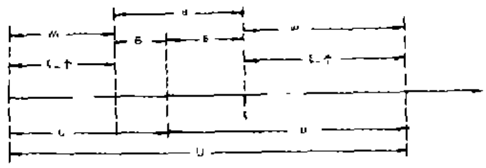

图1 B 所在批队列中的位置

置:在批服务时间 $U \triangleq \sum_{i=1}^{\xi} B_i$ 中任取一点,该点将依概率1落在某个服务时间 B 中,以 B 所在批队列中的位置作为 A 在批队列中的位置是合理的。由图1有

$$U_+ = W_s + B_+ \tag{30}$$

由引理5有

$$U_+^*(s) = W_s^*(s)B_+^*(s) \quad (\because W_s \text{ 与 } B_+ \text{ 独立})$$

即 $\frac{1-U^*(s)}{sE(U)} = W_s^*(s)\frac{1-B^*(s)}{sE(s)} = \frac{\mu}{s+\mu}W_s^*(s)$

又因 U 的 LST 为 $U^*(s) = \xi[B^*(s)] = \xi\left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)$,所以

$$W_s^*(s) = \frac{(s+\mu)\left[1-\xi\left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)\right]}{rs} \tag{31}$$

又因当 A 所在的批到达时系统不空,有

$$W_f = B_+ + \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{\tilde{x}(B_+)} (\text{系统不空}) \tag{32}$$

且 $B \sim \Gamma(1,\mu)$,所以 $B_+ \sim \Gamma(1,\mu)$,且

$W_f^*(s) = E[e^{-sW_f} \mid \text{到达时系统空}]P\{\text{到达时系统空}\}$
$+ E[e^{-sW_f} \mid \text{到达时系统不空}]P\{\text{到达时系统不空}\}$

记 $p = P\{\text{到达时系统空}\}$,类似于(2.14)式的推导,得

$$W_f^*(s) = p + (1-p)\theta^*(s) \tag{33}$$

由[2]知任意时刻系统的队长 L 的 PGF 为

$L(t) = \frac{Q(z)}{\xi^-(z)}$($\xi_-$ 为队长为 ξ 的队列中任一顾客之前的顾客数)

$$= \frac{(1-z)(1-g^k-rg^k)}{1+z\xi(z)g^k-g^k-z} \tag{34}$$

所以,$p = L(0) = \frac{1-g^k-rg^k}{1-g^k}$ (35)

由(35)、(33)、(31)与(29)式立得(27)式,由(27)式或由(32)式与(31)式可得(28)式。

定理5 设 W 为先来先服务情况下一个顾客的等待时间,则 W 的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{(1-\sigma)(rs+\mu)(s+\mu)\left[1-\xi\left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)\right]}{rs[rs+\mu(1-\sigma)]} \tag{36}$$

且
$$E(W)=\frac{r\sigma}{\mu(1-\sigma)}+\frac{r^{(2)}-r}{2r\mu} \tag{37}$$

基中 σ 满足
$$\sigma=\frac{\lambda^k}{[\lambda+\frac{\mu}{r}(1-\sigma)]^k} \tag{38}$$

证　W 仍由两部分所组成,一部分是批等待时间 W_f,另一部分是该顾客(记为 A)在批中的等待时间 W_t。由图 1 有

$$U_-=W_t+B_- \tag{39}$$

由引理 5,类似于(31)式的推导,W_t 的 LST 为

$$W_t^*(s)=\frac{(s+\mu)\left[1-\xi\left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)\right]}{rs} \tag{40}$$

由文献[3]知,对一到达间隔时间 J 服从一般分布的 $G/M/1$ 排队系统,在先来先服务情况下,一个顾客的等待时间 W_g 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 1-\sigma e^{-\mu(1-\sigma)t} & t>0\end{cases}$$

从而 W_g 的 LST 为

$$W_g^*(s)=\frac{(1-\sigma)(s+\mu)}{s+\mu(1-\sigma)}$$

其中 σ 满足:$\sigma=J^*(\mu-\mu\sigma)$($J^*(s)$ 为 J 的 LST)

因为当 $J\sim\Gamma(k,\lambda)$ 时,$J^*(s)=\frac{\lambda^k}{(s+\lambda)^k}$,所以,对于 $E_k/M/1$ 排队系统其一个顾客的(FCFS)等待时间 W_g 的 LST 为 $W_g^*(s)=\frac{(1-\sigma)(s+\mu)}{s+\mu(1-\sigma)}$,$\sigma$ 满足方程:

$$\sigma=\frac{\lambda^k}{(\mu-\mu\sigma+\lambda)^k}$$

从而对于排队系统 $E_k^\xi/M/1$,可以看成到达间隔时间 $J\sim\Gamma(k,\lambda)$,服务时间为 $U=\sum_{i=1}^{\xi}B_i$,一个服务台的系统,因为 $E(U)=rE(B)=\frac{r}{\mu}$,所以 W_f 的 LST 为

$$W_f^*(s)=\frac{(1-\sigma)(rs+\mu)}{rs+\mu(1-\sigma)}\cdot \tag{41}$$

其中 σ 满足:$\sigma=\frac{\lambda^k}{\left[\lambda+\frac{\mu}{r}(1-\sigma)\right]^k}$

由(41)式与(40)式,并注意到 $W^*(s)=W_f^*(s)W_t^*(s)$ 立得(36)式,由(40)式与(41)式立得(37)式。

易验证,排队系统 $M/M/1$ 的相应结果是排队系统 $E_k^\xi/M/1$ 当 $k=1,\xi\equiv 1$ 时的特例。

参考文献:

[1] 徐光辉. 随机服务系统[M].北京:科学出版社,1980.
[2] C J W. The Single Server Queue [M]. Revised Edition, Amsterdam North-Holland Publlishing Company. 1982.
[3] K L. Queueing Systems, Volume 1: Theory[M]. New York. John Wiley and Sons. 1975. 130-137.

Queueing System $E_k^\xi/M/1$

SUN Rong-heng[1], *LI Jian-ping*[2]
(1. College of Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2. Logistics Engineering University, Chongqing 400041)

Abstract: In The anthor studies queueing system $E_k^\xi/M/1$, gives the distributions of thequeue sizes, the busy periods and the waiting times for the system, and some other results.

Key words: queue size; busy period; waiting time

(责任编辑　张小强)