文章编号:1000-582x(2001)05-0081-03

椭球计测定场强的精确计算*

向裕民
(四川轻化工学院 基础科学部,自贡 643033)

摘 要:依据极化的各向异性,考查电场与场强计金属椭球感生电偶极矩间的力矩,建立椭球在待测电场中的非线性振动方程、计算与振幅有关的振动周期,得出用金属椭球场强计测量电场强度的精确计算公式。分析振幅参数对实验计算的影响、给出确定振幅的实验方法。并同按线性振动处理的计算结果进行对比,反映考虑非线性振动因素对计算精度的提升作用。

关键词:各向异性极化;场强;非线性振动;周期

中图分类号:O 442 **文献标识码**:A

椭球场强计广泛用于对静电场和高频电场中电场强度的测量。它可以方便地测定静电场场强的绝对值和高频电场场强的有效值。测量时由于金属椭球在待测电场中极化的各向异性,椭球将作非线性振动,振动周期是振幅的函数。通常一般性测量将椭球小角振动作为线性振动处理,得出与振幅无关的振动周期去计算场强。在精确测量时必须考虑振动非线性的影响。

金属椭球结构的各异性导致在待测电场中极化的各向异性,在获得待测电场与椭球感生电偶极矩间产生的外力矩后,可建立椭球非线性振动方程。计算非线性振动周期,得出测量电场强度精确计算公式,讨论振幅参数的影响和测定。并用数值列表对比线性振动处理的计算结果,体现非线性振动修正对提高实验计算精度的必要。

1 电矩和力矩

椭球场强计构造如图 1 所示。长轴 a、短轴 b 的小型金属长旋转椭球密度为 ρ,沿短轴 OZ 方向细丝铅直悬挂于水平电场 $\boldsymbol{E}$ 中,长轴 OX 方向与电场方向间的夹角为 θ,则有

$$E_x = E\cos\theta;\ E_y = -E\sin\theta;\ E_z = 0 \tag{1}$$

金属椭球几何线度各向不尽相同、在电场中必然产生各向异性极化,即椭球上感应电荷分布产生的感应电偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 异向。

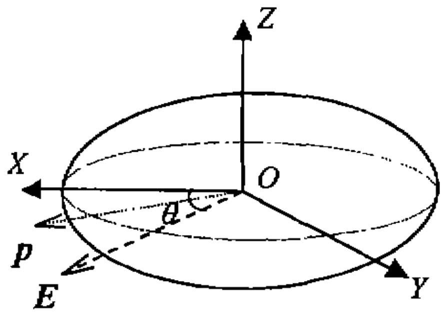

图 1 场强计金属椭球在待测电场中振动

记椭球体积 $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$,用椭球坐标下 Laplace 方程计算 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 间的定量关系为[1]

$$p_x = u\varepsilon_0 VE_x = u\varepsilon_0 VE\cos\theta;$$

$$p_y = v\varepsilon_0 VE_y = v\varepsilon_0 VE\sin\theta;\ p_z = v\varepsilon_0 E_z = 0 \tag{2}$$

其中

$$u = \frac{2e^3}{(1-e^2)\left[\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) - 2e\right]};$$

$$v = \frac{-4e^3}{(1-e^2)\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) - 2e} \tag{3}$$

于是,金属椭球在电场中所受到的电力矩为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{E} = (p_xE_y - p_yE_x)\boldsymbol{k} = -(p_xE\sin\theta + p_yE\cos\theta)\boldsymbol{k} \tag{4}$$

(2) 代入(4) 得出

* 收稿日期:2000-12-28
基金项目:四川省教委重点科研基金资助项目[批准号:川教计(1998)143]
作者简介:向裕民(1944-),男,重庆巫山人,教授。主要从事电磁场理论和非线性动力学研究。

$$M = -\varepsilon_0 VE^2(u-v)\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}L\sin 2\theta \quad (5)$$

此处

$$L = \varepsilon_0 VE^2(u-v) \quad (6)$$

2 振动方程

金属椭球在电力矩和悬丝扭矩的共同作用下产生振动，设悬丝扭转系数为 C，椭球运动方程为

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta + \frac{1}{2}L\sin 2\theta = 0 \quad (7)$$

这儿 J 为金属椭球对 Z 轴的转动惯量

$$J = \frac{1}{5}(a^2+b^2)\rho V \quad (8)$$

以 ω 表振动角速度

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (9)$$

初始条件设为

$$\theta\Big|_{t=0} = \theta_0; \quad \omega\Big|_{t=0} = 0 \quad (10)$$

利用上述初始条件积分方程(7)得出

$$\omega^2 = \frac{C}{J}(\theta_0^2-\theta^2) - \frac{L}{2J}(\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta) \quad (11)$$

在(θ,ω)张成的相平面上，原点(0,0)为中心型奇点，在其附近(11)式有封闭相轨，对应于金属椭球的周期振动[2]。

3 周期计算

现计算金属椭球的振动周期。在相平面第 4 象限内(11)式可写为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{C}{J}(\theta_0^2-\theta^2) - \frac{L}{2J}(\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta)} \quad (12)$$

依据相轨方程(11)关于 θ 轴与 ω 轴的对称性，振动周期为

$$T = 4\sqrt{2J}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{2C(\theta_0^2-\theta^2) - L(\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta)}} \quad (13)$$

θ_0 不大时近似有

$$\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta = -2(\theta_0^2-\theta^2) + \frac{2}{3}(\theta_0^4-\theta^4) \quad (14)$$

代入(13)式被积函数根号内得

$$T = 4\sqrt{J}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{(C+L)(\theta_0^2-\theta^2) - \frac{L}{3}(\theta_0^4-\theta^4)}} \quad (15)$$

在式右积分中作代换 $\theta = \theta_0\sin\varphi$ 有

$$T = 4\sqrt{J}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(C+L-\frac{L}{3}\theta_0^2) - \frac{L}{3}\theta_0^2\sin^2\varphi}} = 4\sqrt{\frac{3J}{L}}\frac{k}{\theta_0}K(k) \quad (16)$$

式中 $K(k)$ 系第一类完全椭圆积分，模数 k 为

$$k = \sqrt{\frac{L}{3(C+L) - L\theta_0^2}}\,\theta_0 \quad (17)$$

利用第一类椭圆积分的展开式[3]

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m)!(2m)!}{2^{4m}(m!)^4}k^{2m} \quad (18)$$

可方便地写出(16)式的近似表达。θ_0 不大时若只保留第一项，其结果可近似写为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3J}{3(C+L) - L\theta_0^2}} \quad (19)$$

上述计算结果表明，周期是振幅的函数。这是振动非线性的必然表现。

4 场强测量和计算

若电场不存在，式(7)中 $L=0$，金属椭球仅在悬丝扭矩作用下作简谐振动，振动周期与振幅无关，且为

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}} \quad (20)$$

用实验方法容易测出 T_0 和 T，由上式有

$$C = \frac{4\pi^2 J}{T_0^2} \quad (21)$$

(20)除以(19)得出

$$\sqrt{\frac{3(C+L) - L\theta_0^2}{3C}} = \frac{T_0}{T} \quad (22)$$

遂解出

$$L = \frac{3C(T_0-T)(T_0+T)}{T^2(3-\theta_0^2)} \quad (23)$$

代入(6)和(21)式便得到测量电场强度量值的表达式

$$E = \frac{2\pi}{T_0 T}\sqrt{\frac{3J(T_0-T)(T_0+T)}{\varepsilon_0 V(u-v)(3-\theta_0^2)}} \quad (24)$$

运用式(8)则得

$$E = \frac{2\pi}{T_0 T}\sqrt{\frac{3\rho(a^2+b^2)(T_0-T)(T_0+T)}{5\varepsilon_0(u-v)(3-\theta_0^2)}} \quad (25)$$

上式表明，精确测量场强必须考虑金属椭球振动非线性的影响，它通过式中含有振幅 θ_0 反映出来。实验时很容易测定椭球长轴在水平面内扫过的角度 $\Delta\varphi$，则 θ_0 可由下式确定

$$\theta_0 = \frac{\Delta\varphi}{2} \tag{26}$$

下表为不同振幅 θ_0 下两种计算值对场强实际值相对误差对比，其中 E_0 为不考虑椭球 θ_0 的影响按线性振动计算的百分比，E_1 为按式(25)考虑非线性振动中 θ_0 的影响计算的百分比。可以明显看出，考虑非线性振动因素可以提高计算精度。

表 1　两种计算值相对误差对比

θ_0	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
E_0	0.00051	0.0021	0.0046	0.0082	0.013	0.018	0.025	0.033	0.042	0.052
E_1	9.5×10^{-9}	9.1×10^{-8}	7.7×10^{-7}	2.4×10^{-6}	5.9×10^{-6}	1.2×10^{-5}	2.3×10^{-5}	3.9×10^{-5}	6.2×10^{-5}	9.5×10^{-5}

5 结　语

椭球场强计的金属椭球在待测电场中的周期振动是非线性的，振动周期与振幅相关。以椭球非线性振动方程为基础，可计算椭球的振动周期，从而得到测量电场强度的精确计算公式，式中包含的振幅参数也不难用实验方法确定。

参考文献：

[1] 虞福春，郑春开．电动力学[M].北京：北京大学出版社，1992.

[2] NAYFEH, A. H. and Mook, D. T., Nonlinear Oscillations[M]. John Wiley & Sons, New York, 1979.

[3] GREENHILL A G. The Applications of Elliptic Functions[M]. Dover, New York, 1959.

Exact Calculation for Measuring Electric Intensity with Ellipsoid Gauge

XIANG Yu-min

(Dept. of Basic Sciences, Sichuan Institute of Light Industry & Chemical Technology, Zigong 643033, China)

Abstract: Based upon the anisotropy of electric polarization, the nonolinear oscillation equation of the ellipsoid in electric field is constructed by considering the rotative moment between electric field and the induced dipole moment on metallic ellipsoid of field intensity gauge. The oscillation period relative to the amplitude and electric intensity is calculated. An expression of exact computation to measure the electric field intensity is achieved. The impact of the amplitude parameter upon the experiment calculation is analyzed and the method to determine the amplitude is contributed. A contrast to the computed resuls by means of linear oscillation is undertaken to show the raising effect to the calculation precision by considering nonlinearity in oscillation.

Key words: anisotropy of electric polarization; field intensity; nonlinear oscillation; period

（责任编辑　钟学恒）