文章编号:1000－582x(2001)05－0145－04

RLW-Burgers 方程的一类精确解*

谈骏渝
（重庆大学 数理学院，重庆　400044）

摘　要:给出了 RLW－Burgers 方程及 KdV－Burgers 方程的一类精确解析解，包含了某些文献的结果，以及其他文献的部分结果。这些解可以表示为 Burgers 方程和 RLW 方程或 KdV 方程的某种线性组合，修正了某些文献的结论。

关键词:RLW－Burgers;KdV－Burgers;解析解;行波解
中图分类号:O 175　　**文献标识码**:A

在研究渠道中表面水波的传播问题时，得到了下面的 RLW－Burgers 方程[1,2]

$$E_1:\ u_t+\alpha u_x+\beta uu_x-\mu u_{xx}-\delta u_{xxt}=0$$

另外，对非线性波动问题被广泛研究的是 KdV－Burgers 方程[3-5]

$$E_2:\ u_t+\alpha u_x+\beta uu_x-\mu u_{xx}+\delta u_{xxx}=0$$

文[6]借助一个未知函数的变换给出了以上两个方程的一类解析解。文[7,8]分别给出了方程 E_2 当 $\alpha=0,\beta=1$ 时的一类解析解。可以证明，经过适当的变换，文[8]与文[9]给出的结果是一致的。文[9]介绍了一些非线性演化方程的行波解，其中包含了文[8]的结果。

本文给出了方程 E_1 和 E_2 的一类解析解，其中包含了文[6～8]的结果，且可得到文[9]中相应的结果。特别地，对 RLW-Burgers 方程还可得到某类振荡激波解。最后，指出本文所给出的解均可表示为如式(18)所示，修正了文[8]的结论。

1　RLW－Burgers 方程的解

对方程 E_1，令

$$u(x,t)=u(\xi),\ \xi=x+\lambda t+\xi_0 \tag{1}$$

代入方程 E_1 并积分一次，不失一般性取积分常数为零，则有

$$-\delta\lambda u_{\xi\xi}-\mu u_\xi+\gamma u^2+(\lambda+\alpha)u=0 \tag{2}$$

其中 $\gamma=\beta/2$。我们将求以下形式的解

$$u(x,t)=u(\xi)=\frac{A+Be^{K\xi}+Ce^{2K\xi}}{(1+e^{K\xi})^2} \tag{3}$$

其中 A,B,C 为待定常数。将(3)代入(2)，并令 $e^{K\xi}$ 的各次幂的系数等于零，得到

$$\begin{gathered}
\gamma A^2+(\lambda+\alpha)A=0\\
-\delta\lambda(B-2A)K^2-\mu(B-2A)K+\\
2\gamma AB+(\lambda+\alpha)(B+2A)=0\\
-4\delta\lambda(C-B+A)K^2-2\mu(C-A)K+\\
\gamma(B^2+2AC)+(\lambda+\alpha)(C+2B+A)=0\\
-\delta\lambda(B-2C)K^2-\mu(2C-B)K+\\
2\gamma BC+(\lambda+\alpha)(2C+B)=0\\
\gamma C^2+(\lambda+\alpha)C=0
\end{gathered} \tag{4}$$

分几种情形求解方程组(4)并给出相应的解(3)。

1) 取 $C=0$，由(4)解得

$$A=-\frac{\lambda+\alpha}{\gamma}=-\frac{1}{10\gamma}\left[5\alpha\pm\left(25\alpha^2+24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]$$

$$B=-2\frac{\lambda+\alpha}{\gamma}=-\frac{1}{5\gamma}\left[5\alpha\pm\left(25\alpha^2+24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]$$

$$\lambda=\frac{1}{10}\left[-5\alpha\pm\left(25\alpha^2+24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]$$

$$\lambda+\alpha=-\frac{6}{5}\mu K,$$

$$K=-\frac{\mu}{5\lambda\delta}=-\frac{1}{12\mu}\left[5\alpha\pm\left(25\alpha^2+24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]$$

因此，有

$$u(x,t)=-\frac{1}{10\gamma}\left[5\alpha\pm\left(25\alpha^2+24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]\frac{(1+2e^{K\xi})}{(1+e^{K\xi})^2}=$$
$$-\frac{1}{40\gamma}\left[5\alpha\pm\left(25\alpha^2+24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]\left(\mathrm{sech}^2\frac{K\xi}{2}-2\tanh\frac{K\xi}{2}+2\right) \tag{5}$$

收稿日期:2000－03－09
谈骏渝(1940－)，男，江苏镇江市人，重庆大学教授。主要研究方向为微分方程、计算数学。

特别地,如 $\delta = 0$,即方程 E_1 为 Burgers 方程。由(4)可得

$$A = B = -\frac{\lambda+\alpha}{\gamma}\ ,\ K = -\frac{\lambda+\alpha}{\mu}$$

其解为

$$u(x,t) = -\frac{\lambda+\alpha}{\gamma}\frac{1}{(1+e^{K\xi})} = -\frac{\lambda+\alpha}{2\gamma}\left(1-\tanh\frac{K\xi}{2}\right) \tag{6}$$

(2) 取 $A = B = 0$,由(4)解得

$$C = -\frac{\lambda+\alpha}{\gamma} = -\frac{1}{10\gamma}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]$$

$$\lambda = \frac{1}{10}\left[-5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]$$

$$K = -\frac{\mu}{5\delta\lambda} = \frac{1}{12\mu}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]$$

因而、有

$$u(x,t) = -\frac{1}{10\gamma}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]\frac{e^{2K\xi}}{(1+e^{K\xi})^2} = -\frac{1}{40\gamma}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]\left(-\mathrm{sech}^2\frac{K\xi}{2} + 2\tanh\frac{K\xi}{2} + 2\right) \tag{7}$$

(3) 取 $B = C = 0$,有

$$A = -\frac{\lambda+\alpha}{\gamma} = -\frac{1}{10\gamma}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right],$$

$$\lambda = \frac{1}{10}\left[-5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right],$$

$$K = \frac{\mu}{5\delta\lambda} = -\frac{1}{12\mu}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right];$$

$$u(x,t) = \frac{1}{10\gamma}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]\frac{(1}{1+e^{K\xi})^2} = -\frac{1}{40\gamma}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]\left(\mathrm{sech}^2\frac{K\xi}{2} + 2\tanh\frac{K\xi}{2} - 2\right) \tag{8}$$

(4) 取 $A = 0$,有

$$B = 2C = -2\frac{\lambda+\alpha}{\gamma} = -\frac{1}{5\gamma}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]$$

$$\lambda = \frac{1}{10}\left[-5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]$$

$$K = \frac{\mu}{5\delta\lambda} = \frac{1}{12\mu}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{10\gamma}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]\frac{2e^{K\xi} + e^{2K\xi}}{(1+e^{K\xi})^2} = -\frac{1}{40\gamma}\left[5\alpha \pm \left(25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta}\right)^{1/2}\right]\left(\mathrm{sech}^2\frac{K\xi}{2} + 2\tanh\frac{K\xi}{2} + 2\right) \tag{9}$$

此即是文[6]的结果。

又若 $\delta = 0$,则有

$$B = C = -\frac{\lambda+\alpha}{\gamma},\ \lambda + \alpha = \mu K$$

$$u(x,t) = -\frac{\lambda+\alpha}{\gamma}\frac{e^{K\xi}}{(1+e^{K\xi})} = -\frac{\lambda+\alpha}{2\gamma}\left(1+\tanh\frac{K\xi}{2}\right) \tag{10}$$

另外,若 $\mu = 0$、即方程 E_1 为 RLW 方程。由(4)解得

$$A = C = 0,\ B = -\frac{\lambda+\alpha}{\gamma},\ \lambda = \frac{\alpha}{\delta K^2 - 1},$$

$$u(x,t) = -\frac{6(\lambda+\alpha)}{\gamma}\frac{e^{K\xi}}{(1+e^{K\xi})^2} = -\frac{3(\lambda+\alpha)}{2\gamma}\mathrm{sech}^2\frac{K\xi}{2} \tag{11}$$

又若取 $\alpha = c_0, \beta = 1 (\gamma = \frac{1}{2}), \lambda = -C$ 及 $\delta = \beta$ 或 $\delta = \beta\lambda$,由(11)就可得到文[9]中给出的 Joseph - Egri 方程的解或 Benjamin - Bona - Mahony(BBM)方程的解。

2 KdV - Burgers 方程的解

对方程 E_2,可得到

$$\delta u_{\xi\xi} - \mu u_\xi + \gamma u^2 + (\lambda + \alpha)u = 0 \tag{12}$$

仍假定解具有(3)的形式,并代入方程 E_2 或(12)即可得到确定系数及 K、λ 的方程组。其实,注意到方程(12)与(2),只要以 δ 代替 $-\delta\lambda$ 即得。相应地,有以下几种情形的解。

1) 当 $C = 0$ 时,有

$$B = 2A = -\frac{\lambda+\alpha}{\gamma} = \frac{12\mu^2}{25\delta\gamma},$$

$$K = \frac{\mu}{5\delta},\ \lambda = \frac{\alpha}{\delta K^2 - 1};$$

$$u(x,t) = \frac{6\mu^2}{25\delta\gamma}\frac{1+2e^{K\xi}}{(1+e^{K\xi})^2} = \frac{3\mu^2}{50\delta\gamma}\left(\mathrm{sech}^2\frac{K\xi}{2} - \tanh\frac{K\xi}{2} + 2\right) \tag{13}$$

又若 $\delta = 0$,其解如(6)所示。

2) 当 $A = B = 0$ 时,有

$$C = -\frac{\lambda+\alpha}{\gamma} = -\frac{6\mu^2}{25\delta\gamma},$$

$$K = \frac{\mu}{5\delta},\ \lambda = \frac{6\mu^2}{25\delta} - \alpha;$$

$$u(x,t) = -\frac{6\mu^2}{25\delta\gamma}\frac{1+2e^{K\xi}}{(1+e^{K\xi})^2} = \frac{3\mu^2}{50\delta\gamma}\left(-\mathrm{sech}^2\frac{K\xi}{2} + \tanh\frac{K\xi}{2} + 2\right) \tag{14}$$

3) 当 $B = C = 0$ 时,有

$$A = -\frac{\lambda+\alpha}{\gamma} = -\frac{6\mu^2}{25\delta\gamma},$$

$$K = -\frac{\mu}{5\delta}, \lambda = +\frac{6\mu^2}{25\delta} - \alpha;$$

$$u(x,t) = -\frac{6\mu^2}{25\delta\gamma}\frac{1}{(1+e^{K\xi})^2} = \frac{3\mu^2}{50\delta\gamma}\left(\operatorname{sech}^2\frac{K\xi}{2} + 2\tanh\frac{K\xi}{2} - 2\right) \tag{15}$$

4）当 $A = 0$ 时，有

$$B = 2C = -2\frac{\lambda+\alpha}{\gamma} = \frac{12\mu^2}{25\delta\gamma},$$

$$K = -\frac{\mu}{5\delta}, \lambda = -\frac{6\mu^2}{25\delta} - \alpha;$$

$$u(x,t) = \frac{6\mu^2}{25\delta\gamma}\frac{2e^{K\xi}+e^{2K\xi}}{(1+e^{K\xi})^2} = \frac{3\mu^2}{50\delta\gamma}\left(\operatorname{sech}^2\frac{K\xi}{2} + 2\tanh\frac{K\xi}{2} + 2\right) \tag{16}$$

解(16) 实际上即是文[6-8] 的结果。若在方程 E_2 中取 $\alpha = 0, \beta = 1$ 或在(13) 中以$\frac{1}{2}$，$-\lambda$ 分别取代 γ 及 $\lambda + 1$ 即可得文[7] 的结果。

又若 $\delta = 0$，此时其解仍如(10) 所示。特别地，取 $\delta = 0, \beta = 1\left(\gamma = \frac{1}{2}\right), \alpha = 0, \mu = v$，则式(6) 和(10) 即为文[9] 中给出的 Burgers 方程的解。

其次，若 $\mu = 0$，即方程 E_2 为 KdV 方程，我们有

$$A = C = 0, B = -6\frac{\lambda+\alpha}{\gamma}, \lambda = -\delta K^2 - \alpha;$$

$$u(x,t) = -6\frac{\lambda+\alpha}{\gamma}\frac{e^{K\xi}}{(1+e^{K\xi})^2} = -\frac{3(\lambda+\alpha)}{2\gamma}\operatorname{sech}^2\frac{K\xi}{2} \tag{17}$$

若又取 $\alpha = 0, \beta = 1\left(\gamma = \frac{1}{2}\right), \delta = \beta, \lambda = -C$，由式(18) 即得文[9] 给出的 KdV 方程的解，且有 $C = -\lambda = \beta K^2, \alpha = 3\beta K^2$ 或 $K = \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}(\alpha\beta > 0)$ 或 $K = \sqrt{\frac{\alpha}{3(-\beta)}}(\alpha\beta < 0)$。

3 讨　论

1) 由常微分方程的理论，方程(2) 和(12) 有两个奇点 $P(0,0)$ 及 $O\left(-\frac{\lambda+\alpha}{\gamma}, 0\right)$。不难看出，当 $\xi \to \infty$ 时其行波解均分别趋于两个奇点，故本文所求得的解为有界行波解，且易验证 $u(\xi)$ 的各阶导数当 $\xi \to \infty$ 时均趋于零。

2) 由 2 的讨论，对 RLW-Burgers 方程，有 $K\lambda = -\frac{\mu}{5\delta}$ 或$\frac{\mu}{5\delta}$，即 $K\lambda$ 为实数，其解对时间变量 t 总是单调的；而对坐标变量 x，当 $25\alpha^2 + 24\frac{\mu^2}{\delta} > 0$ 或 $25\alpha^2 - 24\frac{\mu^2}{\delta} > 0$ 时，K 为实数，其解为单调激波解，行波解的轨线为鞍结异宿轨道。反之，K 为复数，此时解为振荡激波解，其行波解的轨线为鞍焦异宿轨道。

3) 对于 KdV 方程，显见其解(17) 为一孤波解。当 $\delta K^2 > -K$ 或 $\delta K^2 < -\alpha$ 时，其行波为波速 $\delta K^2 + \alpha$ 或 $-\delta K^2 - \alpha$ 的右行波或左行波。又当$\frac{\delta}{\gamma} > 0$时，有 $u(x, t) > 0$，其波峰值为 $-\frac{3(\lambda+\alpha)}{2\gamma} = \frac{3\delta K^2}{2\gamma} > 0$。

4) 在方程 E_2 或(12) 中取 $\alpha = 0, \mu = 0, \beta = 1, \delta = -\gamma$ 及 $\lambda = -C$，即为文[9] 中的 Kuramti - Sivashinsky 方程，其解分别为(13) - (16) 所示，这与文[9] 给出的解的形式是不一样的。

5) 文[8] 将解写成 $u(\xi) = \frac{6}{5}U_B + U_K$，并指出 U_B 和 U_K 分别是相应的 Burgers 方程和 KdV 方程具有不同波速的解。笔者认为，U_B 和 U_K 中的波速 λ 仍应为 KdV - Burgers 方程中的 λ，否则，$\frac{6}{5}U_B + U_K$ 就不可能是 KdV - Burgers 方程的解。而又有若 U_B、U_K 具有与 KdV - Burgers 方程相同的波速 λ，就不能满足该文的方程(13) 和(15)。对此，将式(3) 写为

$$u = \left(A + \frac{C-A}{1+e^{K\xi}}e^{K\xi}\right) + \sigma\left[\frac{\frac{1}{\sigma}(B-a-C)}{(1+e^{K\xi})^2}e^{K\xi}\right] = U_B + \sigma U_K \tag{18}$$

式中 σ 是某个常数。对笔者所讨论的一般情形，其 U_B 均是以下 Burgers 方程

$$u_t + \alpha u_t + 2\gamma u u_x - \varepsilon u_{xx} = 0 \tag{19}$$

的解，且有 $\varepsilon = \frac{6}{5}\mu$。而 U_K 分别是相应的 RLW 方程

$$u_t + \alpha u_x + 2\gamma u u_x - \eta u_{xxt} = 0 \tag{20}$$

及 KdV 方程

$$u_t + \alpha u_x + 2\gamma u_x + \eta u_{xxx} = 0 \tag{21}$$

的解，且对情形(1) 和(4) 有 $\sigma = \frac{1}{6}, \eta = 6\delta$；对情形(2) 和(3) 有 $\sigma = -\frac{1}{6}, \eta = -6\delta$。而对于文[8] 所讨论的情形，相应地为 $\sigma = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{625\delta^2}{18\gamma^4}C\right)^{-\frac{1}{2}}$，且应以 $\varepsilon =$

$\frac{6}{5}\gamma$ 和 $\eta = 6\left(1+\frac{625\delta^2}{18\gamma^4}C\right)^{\frac{1}{2}}\delta$ 分别代替该文(13)中的 γ 和(15)中的 δ。

最后我们可得到这样的结论:对本文给出的方程 E_1 和 E_2 的解,均可由 Burgers 方程(19)的解 U_B 和 RLW 方程(20)的解或 KdV 方程(21)的解 U_k 依式(18)组合而成,即解含有冲激波和孤波解的特性。

参考文献:

[1] BONA J L, PRITCHARD W G, SCOTT L R. An Evaluation of A Model Equation for Water Waves[J]. Phil Trans Roy Soc London, A_{302}, 1981:457-510.

[2] AMICK C J, BONA J L, SCHONBEK M E. Decay of Some Nonlinear Wave Equation[J]. 1989, 81(1):1-49.

[3] CANOSA J, GAZDAG J. The Korteweg deVries - Burgers Equation[J]. J Comput Phys. 1977, 23:393 - 403

[4] BONA J L, SCHONEK M E. The Traveling Wave Solutions to the Korteweg deVries - Burgers Equation[J]. Proc Roy Soc. Edinburgh, 1985, 101A:207 - 226.

[5] 管克英,高歌. Burgers - K - dV 混合型方程行波解的定性分析. 中国科学 A 辑[J]. 1987, 1:64-73.

[6] 王明亮. Exact Solution for the RLW - Burgers Equation[J]. 应用数学, 1988, 8(1):51 - 55.

[7] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves[M]. New York: Wiler Pub. 1974.

[8] 熊树林. Burgers - KdV 方程的一类解析解[J]. 科学通报, 1989, 1:26 - 29.

[9] 刘式达,刘式适,叶其孝 非线性演化方程的显示行波解[J]. 数学的实践与认识 1998, 28(4):289 - 293

A Class of Exact Solution for RLW-Burgers Equation

TAN Jun-Yu

(College of Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: A class of analytic solution for RLW-Burgers equation and KdV-Burgers equation are given which include results of some papers. These solutions can be expressed as some linear combination of solutions of Burgers equation and RLW equation or KdV equation which correct conclusion in some paper.

Key words: RLW-Burgers equation; KdV-Burgers equation; Analytic solution; Traveling wave solution

(责任编辑 张小强)

(上接第 141 页)

Developing a Recognition System of Gun-code

YANG Bo, PENG Jian, YE Jun-yong, LIU Jian-sheng, WANG Tong-qing

(Laboratory of Artificial Vision, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Intelligent recognition system of gun-code is designed, which achieves online recognition of gun-code. We applied video camera to get image, and some special technique in this deformed character recognition. As well, we applied dynamic template matching to get a better result.

Key Words: deformed character recognition, rrame filter, dynamic template matching, online processing

(责任编辑 张小强)