文章编号:1000-582x(2001)05-0149-04

具有两个公共值集的亚纯函数的唯一性*

李江涛
(重庆大学 数理学院,重庆 400044)

摘 要:F.Gross提出问题:能否找到两个(甚至一个)有穷集合 $S_j(j=1,2)$,使得满足 $E(S_j,f)=E(S_j,g)(j=1,2)$ 的任何两个整函数 f 和 g 必恒等,这里 $E(S_j,f)$ 表示 S_j 关于 f 的逆像,记重数。仪洪勋对此问题作了肯定回答。本文在涉及重值的情况下对此问题作进一步的讨论,主要结果如下:设 $S=\{\omega\mid\omega^8-56\omega^2+96\omega-42\}$,如果 f 与 g 为两个满足 $E_{4)}(S,f)=E_{4)}(S,g)$ 和 $\bar{E}(\{\infty\},f)=\bar{E}(\{\infty\},g)$ 的非常数亚纯函数,则必有 $f\equiv g$。

关键词:亚纯函数;公共值集;唯一性
中图法分类:O 174.52 **文献标识码**:A

1 引言及主要结果

将使用值分布论的标准记号[1,2].设 $f(z)$ 是开平面上非常数亚纯函数,S 是一个复数集合,令

$$E(S,f)=\bigcup_{a\in S}\{z\mid f(z)-a=0\}$$

其中 $f(z)-a$ 的 m 重零点在 $E(S,f)$ 中记 m 次,若不记重数,则记为 $\bar{E}(S,f)$。

1994年,仪洪勋在文献[3,4]中解决了F.Gross在文献[5]中提出的一个公开问题,证明了存在二个有限集合 $S_j(j=1,2)$,使得对任意两个非常数整函数 f 与 g,只要 $E(S_j,f)=E(S_j,g)(j=1,2)$,必有 $f\equiv g$.之后,方明亮和徐万松[6],仪洪勋[7]分别独立证明了使上述结论成立的集合 S_1 与 S_2 的最小基数分别为1与3。

一个自然的问题是对于亚纯函数相应的结论是否成立?许多文献对此进行了研究,最近仪洪勋证明了

定理A** 设 $P(\omega)=a\omega^n-n(n-1)\omega^2+2n(n-2)b\omega-(n-1)(n-2)b^2$,这里 $n(\geq 8)$ 是一个整数,a 和 b 是二个非零复数且 $ab^{n-2}\neq 2$.$S=\{\omega\mid P(\omega)=0\}$,如果 f 与 g 为两个满足 $E(S,f)=E(S,g)$ 和 $\bar{E}(\{\infty\},g)$ 的非常数亚纯函数,则必有 $f\equiv g$.

设 k 为正整数,用 $E_{k)}(a,f)$ 表示 $f(z)-a$ 的重级不超过 k 的零点集合且 $m(\leq k)$ 重零点在 $E_{k)}(a,f)$ 中记 m 次,令

$$E_{k)}(S,f)=\bigcup_{a\in S}E_{k)}(a,f)$$

本文证明了下述定理

定理1 设 $S=\{\omega\mid P(\omega)=0\}$,这里 $P(\omega)$ 为定理A中定义的多项式,如果 f 与 g 为两个满足 $E_{k)}(S,f)=E_{k)}(S,g)$ 和 $\bar{E}(\{\infty\},f)=\bar{E}(\{\infty\},g)$ 的非常数亚纯函数,则当下列条件之一成立时必有 $f\equiv g$

(1) $k=4,n\geq 8$
(2) $k=3,n\geq 9$
(3) $k=2,n\geq 10$
(4) $k=1,n\geq 13$

2 几个引理

引理1[8] 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数,k 为正整数,则

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\leq N\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f) \quad (1)$$

引理2[9] 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数,$a_i(i=0,1,\cdots,m)$,$b_j(j=0,1,\cdots,n)$ 为有穷复数且 $a_m\neq 0$,$b_n\neq 0$,则

$$T\left(r,\frac{\sum_{i=0}^{m}a_if^i}{\sum_{j=1}^{n}b_jf^j}\right)=\max\{m,n\}T(r,f)+S(r,f) \quad (2)$$

* 收稿日期:2001-02-27
作者简介:李江涛(1963-),男,重庆垫江人,重庆大学讲师,博士。主要从事复分析研究。

** 仪洪勋.具有两个公共值集的亚纯函数,数学学报(待发表).

引理 3 设 F 和 G 为非常数亚纯函数，$E_{k)}(1,F)=E_{k)}(1,G)$，令

$$H=\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1}-\frac{G''}{G'}+\frac{2G'}{G-1} \tag{3}$$

则当 H 不恒为 0 时有

$$N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N(r,H)+S(r,F)+S(r,G) \tag{4}$$

证 设 z_0 为 $F-1$ 的单重零点，由 $E_{k)}(1,F)=E_{k)}(1,G)$ 知 $E_{1)}(1,F)=E_{1)}(1,G)$，经计算得 $H(z_0)=0$，故

$$N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{H}\right)\leqslant$$
$$T(r,H)+O(1)\leqslant N(r,H)+S(r,F)+S(r,G)$$

引理 4[10] 设 f_1 和 f_2 为非常数亚纯函数，c_1,c_2,c_3 是 3 个非零常数．如果 $c_1f_1+c_2f_2\equiv c_3$，则

$$T(r,f_1)\leqslant \overline{N}\left(r,\frac{1}{f_1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_2}\right)+\overline{N}(r,f_1)+S(r,f_1) \tag{5}$$

3 定理 1 的证明

设

$$F=\frac{af^n}{n(n-1)(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)} \tag{6}$$

$$G=\frac{ag^n}{n(n-1)(g-\alpha_1)(g-\alpha_2)} \tag{7}$$

其中 α_1,α_2 是方程 $n(n-1)\omega^2-2n(n-2)b\omega+(n-1)(n-2)b^2=0$ 的 2 个判别的根，由于多项式 $P(\omega)$ 只有单根(见定理 A 的证明)，故由 $E_{k)}(S,f)=E_{k)}(S,g)$ 知 $E_{k)}(1,F)=E_{k)}(1,G)$．再设 H 由(3)式给出，笔者区分两种情形讨论：

情形 1 H 不恒为 0，则(4)式成立．设 $z_0\in E_{k)}(1,F)$，由 $E_{k)}(1,F)=E_{k)}(1,G)$ 且经计算得 $H(z_0)\neq\infty$，故

$$N(r,H)\leqslant \overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{G}\right)+\overline{N}(r,F)+N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right) \tag{8}$$

其中 $N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)$ 表示 F' 的零点但不是 $F(F-1)$ 的零点的计数函数，$N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)$ 表示 G' 的零点但不是 $G(G-1)$ 的零点的计数函数。

由(6)及(7)式得

$$F'=\frac{(n-2)af^{n-1}(f-b)^2f'}{n(n-1)(f-\alpha_1)^2(f-\alpha_2)^2}$$
$$G'=\frac{(n-2)ag^{n-1}(g-b)^2g'}{n(n-1)(g-\alpha_1)^2(g-\alpha_2)^2} \tag{9}$$

由(8)及(9)式得

$$N(r,H)\leqslant \overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-b}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right) \tag{10}$$

其中 $N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)$ 表示 f' 的零点但不是 $f(f-b)(F-1)$ 的零点的计数函数，$N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)$ 表示 g' 的零点但不是 $g(g-b)(G-1)$ 的零点的计数函数．

注意到 $P(0)\neq 0,P(b)\neq 0$ 由第二基本定理得

$$(n+1)T(r,f)+(n+1)T(r,g)\leqslant \overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-b}\right)+\overline{N}(r,g)-N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,f)+S(r,g) \tag{11}$$

应用引理 2，从(6)及(7)式知

$$T(r,F)=nT(r,f)+S(r,f)$$
$$T(r,G)=nT(r,g)+S(r,g) \tag{12}$$

故

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{1}{2}T(r,F)+\frac{1}{2}T(r,G)+O(1)\leqslant N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{n}{2}T(r,f)+\frac{n}{2}T(r,g)+S(r,f)+S(r,g) \tag{13}$$

当 $k\geqslant 3$ 时更有

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{G-1}\right)-\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{n}{2}T(r,f)+\frac{n}{2}T(r,g)-\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+S(r,f)+S(r,g) \tag{14}$$

注意到 $\bar{E}(\{\infty\},f) = \bar{E}(\{\infty\},g)$，结合(4)，(10)，(11)，(14)式得，当 $k \geq 3$ 时

$$(n+1)T(r,f)+(n+1)T(r,g) \leq 2\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+3\overline{N}(r,f)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-b}\right)+\frac{n}{2}T(r,f)+\frac{n}{2}T(r,g)+S(r,f)+S(r,g) \leq 4T(r,f)+4T(r,g)+3\overline{N}(r,f)+\frac{n}{2}T(r,f)+\frac{n}{2}T(r,g)+S(r,f)+S(r,g)$$

即

$$(n-6)\{T(r,f)+T(r,g)\} \leq 6\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g) \tag{15}$$

由(4)，(10)，(11)，(13)式得，当 $k < 3$ 时

$$(n+1)T(r,f)+(n+1)T(r,g) \leq \overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+4T(r,f)+4T(r,g)+3\overline{N}(r,f)+\frac{n}{2}T(r,f)+\frac{n}{2}T(r,g)+S(r,f)+S(r,g) \tag{16}$$

应用引理 1，从(6)及(7)得

$$\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right) \leq \sum_{j=1}^{n}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{f-\beta_j}\right)+\sum_{j=1}^{n}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{g-\beta_j}\right) \leq \frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{g'}\right) \leq \frac{1}{k}\left\{N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{g}\right)+N(r,g)\right\}+S(r,f)+S(r,g) \leq \frac{2}{k}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g) \tag{17}$$

这里 $\beta_j(j=1,2,\cdots n)$ 为 $P(\omega)=0$ 的 n 个判别的根，故从(16)及(17)式知，当 $k<3$ 时有

$$\left(n-\frac{4}{k}-6\right)\{T(r,f)+T(r,g)\} \leq 6\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g) \tag{18}$$

令

$$V=\frac{F'}{F(F-1)}-\frac{G'}{G(G-1)} \tag{19}$$

再区分两种情形讨论：

情形 1.1　$V \equiv 0$. 由(19)得

$$\frac{1}{F}-1 \equiv A\left(\frac{1}{G}-1\right) \tag{20}$$

这理 $A \neq 0$ 是一个积分常数．从(12)及(20)知

$$T(r,g)=T(r,f)+S(r,f) \tag{21}$$

令

$$f_1=\frac{1}{F},f_2=\frac{-A}{G} \tag{22}$$

则

$$f_1+f_2=1-A \tag{23}$$

如果 $1-A \neq 0$，根据引理4，从(6)，(7)，(12)，(21)，(22)，(23)得

$$nT(r,f) \leq \overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_2}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-a_1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-a_2}\right)+\overline{N}(r,g)+S(r,f) \leq 7T(r,f)+S(r,f)$$

这与 $n \geq 8$ 矛盾，故 $1-A=0$，从而 $F \equiv G$，于是 $H \equiv 0$，与假设矛盾．

情形 1.2　V 不恒等于 0．由(19)知 F 与 G 的极点不是 V 的极点．设 $z_0 \in E_{k)}(1,F)$，则由 $E_{k)}(1,F)=E_{k)}(1,G)$ 知 $V(z_0) \neq \infty$，故由(6)，(7)，(17)及(19)得

$$N(r,V) \leq \overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right) \leq \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\frac{2}{k}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g) \leq \left(1+\frac{2}{k}\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g) \tag{24}$$

从(19)式又知 $m(r,V)=S(r,f)+S(r,g)$，故

$$T(r,V) \leq \left(1+\frac{2}{k}\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g) \tag{25}$$

设 z_0 是 f 的 p 重极点，是 g 的 q 重极点．从(6)及(7)式知 z_0 是 F 的 $(n-2)p$ 重极点，是 G 的 $(n-2)q$ 重极点，再从(19)式知，z_0 是 V 的至少 $n-3$ 重零点，故

$$(n-3)\overline{N}(r,f) \leq N\left(r,\frac{1}{V}\right) \leq T(r,V)+O(1) \tag{26}$$

由(15)，(18)，(25)，(26)式得，当 $k \geq 3$ 时

$$\left(n-6-\frac{6\left(1+\frac{2}{k}\right)}{n-3}\right)\{T(r,f)+T(r,g)\} \leq S(r,f)+S(r,g) \tag{27}$$

当 $k < 3$ 时

$$\left(n - 6 - \frac{4}{k} - \frac{6\left(1 + \frac{2}{k}\right)}{n - 3}\right)\{T(r,f) + T(r,g)\} \leqslant S(r,f) + S(r,g) \tag{28}$$

若 $k = 4, n \geqslant 8$ 或 $k = 3, n \geqslant 9$，由(27)式即得矛盾。若 $k = 2, n \geqslant 10$ 或 $k = 1, n \geqslant 13$ 由(28)式即得矛盾。

情形 2 $H \equiv 0$. 由(3)式得

$$\frac{F'}{(F-1)^2} \equiv A \cdot \frac{G'}{(G-1)^2} \tag{29}$$

这里 A 为非零常数. 由(29)式知 $E(1,F) = E(1,G)$. 再结合(6)及(7)式可得 $E(S,f) = E(S,g)$，根据定理 A 便知 $f \equiv g$.

综上所述，定理 1 证毕.

参考文献：

[1] YANG L. Value distribution theory[M]. Berlin, Spring-Verlag, 1993.

[2] 杨重骏,仪洪勋. 亚纯函数的唯一性理论[M]. 北京：科学出版社，1995.

[3] 仪洪勋. 亚纯函数的唯一性和 Gross 的一个问题[J]. 中国科学,1994,24(5):457－466.

[4] 仪洪勋. 关于 Gross 的一个问题[J]. 中国科学,1994,24(11):1137－1144.

[5] GROSS F. Factorization of meromorphic functions and some open problems[A]. Proc. Conf. Univ [C]. Kentucky, 1976, Lecture Notes in Math, 599, Berlin, Spring-Verlag, 1977. 51－69.

[6] 方明亮,徐万松. 关于 Gross 的一个问题的一个注记[J]. 数学年刊(A),1997,18(5):563－568.

[7] YI H X. On a question of Gross concerning uniqueness of entire functions[J]. Bull Austral Math. Soc., 1998,57: 343－349.

[8] YI H X. Uniqueness of meromorphic functionsand a question of C C Yang[J]. Complex variables, 1990,14: 169－176.

[9] Mokhon'KO A Z. On the Nevanlinna characteristics of some meromorphic functions, in " Theory of functions, functional analysis and their applications ", Izd-vo Khar'kovsk. Un－ta, 1971,14: 83－87.

[10] 仪洪勋. 具有三个公共值的亚纯函数[J]. 数学年刊(A),1998,9(4):434－439

On the Uniqueness of Meromorphic Functions That Share Two Sets

LI Jiang-tao

(College of Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: The authors have studied the uniqueness of meromorphic functions that share two sets. The following theorem is proved: Let $S = \{\omega \mid \omega^8 - 56\omega^2 + 96\omega - 42\}$. If f and g are two non-constant meromorphic functions such that $E_{4)}(S,f) = E_{4)}(S,g)$ and $\bar{E}(\{\infty\},f) = \bar{E}(\{\infty\},g)$, then $f \equiv g$.

Key words: meromorphic function; shared set; uniqueness.

（责任编辑 张小强）

·下期论文摘要预告·

微量元素在三峡库区水域生态系统中的迁移

祁俊生，傅 川，谭 君，黄秀山

（重庆三峡学院化生系，重庆万州 404000）

摘 要：以三峡库区长寿、万州、巫山等江段的水体、底泥和鱼体为研究对象，根据微量元素 Hg、Cr、Pb、Cd、Cu、Zn 等在水体、底泥和鱼体中的含量变化，从而确定在水域生态系统中的迁移转化规律，其微量元素的含量是底泥＞鱼体(生物体)＞水体，在鱼体中微量元素的分布特征是鱼内脏＞鱼肌肉＞鱼骨。水体、鱼体和底泥三者之间两两的分配因子、浓集系数和吸收系数在整个库区基本保持恒定，说明微量元素的吸收、转化与迁移有它的固有规律。Hg 在鱼体(生物体)中易累积，易在食物链中对人体形成危害。同时还对微量元素在食物链中转移模式进行了探讨。

关键词：微量元素；重金属元素；食物链；三峡库区水域；迁移