文章编号:1000 - 582X(2002)10 - 0075 - 03

一类广义 Liénard 系统极限环的存在性*

张 谋
(重庆大学 数理学院,重庆 400044)

摘 要:讨论广义 Liénard 方程极限环存在的充分条件。在用环域定理证明广义 Liénard 方程极限环存在性的过程中,所作的环域的境界线均为已知曲线,因而在证明方程存在极限环的同时,可以估计极限环的位置。还证明了在限制 $G(\pm\infty)=+\infty$ 被取消时,其极限环的存在性,当 $\varphi(y)=y$ 时即为文献[1]的定理 2。

关键词:极限环;存在性;Liénard 方程
中图分类号:O175.12 **文献标识码**:A

关于 Liénard 系统

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$$

的等价系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y-F(x)\\ \dot{y}=-g(x)\end{cases}$$

或 $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-f(x)y-g(x)\end{cases}$

其中 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$

的极限环的存在性,过去讨论较多[1-6],做了大量的工作,但大部分都假设了条件 $G(\pm\infty)=+\infty$。对广义 Liénard 系统:

$$\begin{cases}\dot{x}=\varphi(y)\\ \dot{y}=-f(x)\varphi(y)-g(x)\end{cases}\tag{1}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-f(x)-\frac{g(x)}{\varphi(y)}\tag{2}$$

讨论较少,本文给出该系统极限环存在的充分条件。其中定理 2 去掉了限制 $G(\pm\infty)=+\infty$,当 $\varphi(y)=y$ 时即得到文献[1]中的定理 2。设方程(1)中的函数均连续,有唯一的奇点(0,0)。

令 $\lambda(x,y)=\int_0^y\varphi(y)\mathrm{d}y+\int_0^x g(x)\mathrm{d}x$,$G(x)=\int_0^x g(x)\mathrm{d}x$

定理 1 设方程(1)中的函数满足:

1) $y\varphi(y)>0(y\neq 0)$,$\varphi(\pm\infty)=\pm\infty$

2) $xg(x)>0(x\neq 0)$,$\int_0^{\pm\infty}g(x)\mathrm{d}x=+\infty$

3) 当 $|x|$ 充分小时,$f(x)<0$

4) $\exists a>0$,当 $|x|>a$ 时 $f(x)>0$

5) (A) 当 $x>a$ 时,$\frac{g(x)}{f(x)}$ 有上界;(B) 当 $x<-a$ 时,$\frac{g(x)}{f(x)}$ 有下界,则系统(1)必存在极限环。

证 令 $Q(x,y)=-f(x)\varphi(y)-g(x)$,由已知 $\exists N>0,M>0$,当 $|y|>N$,$|x|\leqslant a$ 时,$\sup\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sup\left(-f(x)-\frac{g(x)}{\varphi(y)}\right)<M$

由条件 5) 知:

当 $x>a$ 时,存在 $N_1<0$ 使 $\varphi(N_1)<-\frac{g(x)}{f(x)}$,即 $Q(x,N_1)=-f(x)\varphi(N_1)-g(x)>0$;或,当 $x<-a$ 时,$\exists N_2>0$ 使 $\varphi(N_2)>-\frac{g(x)}{f(x)}$,即 $Q(x,N_2)=-f(x)\varphi(N_2)-g(x)<0$;

下面构造环域的内外境界线:

因为 $\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=-f(x)\varphi^2(y)>0$ 当 $|x|$ 充分小时

所以取充分小 $C>0$,则 $\lambda(x,y)=C$ 可作为环域的内境界线。

设定理 1 条件 5)(B) 成立,记 $N_3\geqslant\max\{N+1,N_2\}$,过 $A_1(-a,N_3)$ 作斜率为 M 的直线交 $x=a$ 于 A_2,作曲线 $\lambda(x,y)=\lambda(A_2)$ 交 $x=a$ 于另一点 $A_3(a,y_3)$ 且 $y_3<0$;再取 $N_4=\max\{N_3-y_3\}$,过 $A_4(a,-N_4)$ 作斜

* 收稿日期:2002 - 06 - 14
作者简介:张谋(1963 -),男,重庆人,重庆大学讲师,硕士。主要从事常微分方程的研究。

率为 M 的直线，交直线 $x=-a$ 于点 A_5，过 A_5 点作曲线 $\lambda(x,y)=\lambda(A_5)$ 交 $x=-a$ 于另一点 A_6。

若 A_6 在 A_1 之下，则取闭曲线 Γ：$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$ 作为环域的外境界线。因为在线段 A_1A_2 上，$\frac{dy}{dx}<M,\frac{dx}{dt}>0$；在弧段 A_2A_3、A_5A_6 上 $\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(1)}=-f(x)\varphi^2(y)<0$；在线段 A_3A_4 上 $\frac{dx}{dt}<0$；在线段 A_4A_5 上，$\frac{dy}{dx}<M,\frac{dy}{dx}<M,\frac{dx}{dt}<0$；在线段 A_6A_1 上 $\frac{dx}{dt}>0$；所以方程(1)正向轨线与 Γ 相遇时均进入 Γ 的内部。

若 A_6 在 A_1 之上，此时曲线 $\lambda(x,y)=\lambda(A_5)$ 在 $x<-a$ 部分必交 $y=N_2$ 于点 A_7，取闭曲线 Γ：$A_1A_2A_3A_4A_5A_7A_0A_1$ 作为环域的外境界线(其中 A_0 是 $y=N_2$ 与 $x=-a$ 的交点)，因为在线段 A_7A_0 上 $\frac{dy}{dt}=Q(x,N_2)<0$。由环域定理知，方程(1)至少存在一个极限环。

定理1中所作环域的境界线均为已知曲线，因而在证明存在极限环的同时，可以初步估计极限环的位置。

定理2 若方程(1)满足下列条件：

1) $y\varphi(y)>0(y\neq0),\varphi(\pm\infty)=\pm\infty$

2) $xg(x)>0(x\neq0)$

3) 存在数 $a<0<b$，当 $a<x<b$ 时 $f(x)<0$；当 $x<a$ 或 $x>b$ 时 $f(x)>0$

4) $\exists C_1,K_1,M_1>0$，当 $x>b$ 时 $g(x)/f(x)>K_1$；当 $-K_1<y<0$ 时 $\varphi(y)>-C_1$；

当 $0<x<+\infty$ 时 $\int_0^x\left(-f(x)-\frac{1}{N}g(x)\right)dx<M_1$，其中 $N=\sup\limits_{-K_1<y<0}\varphi(y)$，$M_1+C_1\leqslant K_1$

5) $\exists C_2,K_2,M_2>0$ 当 $x<a$ 时 $g(x)/f(x)<-K_2$；当 $0<y<K_2$ 时 $\varphi(y)<C_2$；

当 $-\infty<x<0$ 时 $G(x)/\varphi(K_2)+F(x)\leqslant M_2$；当 $y\geqslant K_2$ 时 $\varphi(y)\geqslant\varphi(K_2)$，则方程(1)存在稳定的极限环。

证 与定理1的证明类似，$\lambda(x,y)=C$(C 充分小)可作为环域的内境界线。过 $A_0(0,-M_1-C_1)$ 作方程(1)的正向轨线 $f(A_0,I^+)$ 及负向轨线 $f(A_0,I^-)$，下证明：

a) 轨线 $f(A_0,I^-)$ 不与正 x 轴相交。

当 $f(A_0,I^-)$ 在区域 $D_1=\{(x,y)\mid 0<x<b,-K_1<y<0\}$ 内时，因 $\dot{x}=\varphi(y)<0,\dot{y}=-f(x)\varphi(y)-g(x)<0$，所以 $f(A_0,I^-)$ 单调增加。$f(A_0,I^-)$ 必与 $x=b$ 相交(后面证明 $f(A_0,I^-)$ 不可能与正 x 轴相交)。

当 $f(A_0,I^-)$ 进入区域 $D_2=\{(x,y)\mid b<x<+\infty,-K_1<y<0\}$ 内时，由条件4)知 $\frac{dy}{dx}=-f(x)-\frac{g(x)}{\varphi(y)}\geqslant-\frac{C_1-K_1}{K_1C_1}g(x)>0$(其中 $C_1-K_1\leqslant-M_1<0$)

即 $f(A_0,I^-)$ 在 D_2 内仍单调增加。因 $y_{A_0}=-M_1-C_1\geqslant-K_1$，若 $f(A_0,I^-)$ 与正 x 轴相交，则必先与 $y=-C_1$ 相交于点 $(\bar{x},-C_1)$，方程(2)从 $x=0$ 到 $x=\bar{x}$ 积分有：

$$y(\bar{x})=y_{A_0}+\int_0^{\bar{x}}\left(-f(x)-\frac{g(x)}{\varphi(y)}\right)dx<y_{A_0}+\int_0^{\bar{x}}\left(-f(x)-\frac{g(x)}{N}\right)dx<-M_1-C_1+M_1\leqslant-C_1$$

这与 $y(\bar{x})=-C_1$ 矛盾，所以 $f(A_0,I^-)$ 不与正 x 轴相交。

b) $f(A_0,I^+)$ 必负 x 轴相交。

考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=-f(x) \tag{3}$$

求其从 $x=0$ 到 $x=a$ 的定积分

$$y(a)=y_0-\int_0^a f(x)dx=-M_1-C_1-F(a)$$

即方程(3)从 A_0 出发的正向轨线 $f(A_0,I^+)$ 与直线 $x=a$ 的交点为 $(a,-M_1-C_1-F(a))$，在区域 $D_3=\{(x,y)\mid a<x<0,y<0\}$ 内，由条件1)与2)知。

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2)}<\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3)}$$

所以 $f(A_0,I^+)$ 在区域 D_3 内或者与负 x 轴相交，或者与 $x=a$ 相交。若与 $x=a$ 相交后进入区域 $D_4=\{(x,y)\mid x<a,y<0\}$，此时，$\dot{x}<0,\dot{y}>0$，$f(A_0,I^+)$ 单调递减，经有限时间后必与负 x 轴相交。设 $f(A_0,I^+)$ 与负 x 轴交点为 A_1。

c) 方程(2)从 A_1 出发的正向轨线 $f(A_1,I^+)$ 必与正 y 轴相交。

在区域 $D_5=\{(x,y)\mid a<x_{A_1},y>0\}$ 内，$\dot{x}>0,\dot{y}>0$，即 $f(A_1,I^+)$ 单调增加。经有限时间必与正 y 轴相交。在区域 $D_6=\{(x,y)\mid-\infty<x_{A_1}<a,0<y<K_2\}$ 内，由条件5)知

$$\frac{dy}{dx}\geqslant-\frac{1}{K_2}g(x)-\frac{1}{C_2}g(x)=-\frac{C_2+K_2}{K_2C_2}g(x)>0$$

所以 $f(A_1,I^+)$ 在 D_6 内单调增加，若 $f(A_1,I^+)$ 不与 $y=K_2$ 相交，则必与正 y 轴相交。设 $f(A_1,I^+)$ 与 $y=K_2$ 相交于 (x_1,K_2)，在交点处作方程

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{g(x)}{\varphi(K_2)} \tag{4}$$

求其从 $x = x_1$ 到 $x = 0$ 的积分

$$y(0) = y(x_1) - F(0) + F(x_1) - \frac{G(0)}{\varphi(K_2)} + \frac{G(x_1)}{\varphi(K_2)} \leqslant K_2 + M_2$$

即方程(4)与正 y 轴的交点的纵坐标不大于 $K_2 + M_2$，且

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2)} < \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4)}$$

因此方程(2)从 A_1 出发的正向轨线 $f(A_1, I^+)$ 必与正 y 轴相交于 A_2，$y_{A_2} \leqslant K_2 + M_2$。

d) 方程(2)的从 A_2 出发的正向轨线 $f(A_2, I^+)$ 必与正 x 轴相交。

求方程(3)从 $x = 0$ 到 $x = b$ 的积分

$$y(b) = y(0) - F(b) = y_{A_2} - F(b) \leqslant K_2 + M_2 - F(b)$$

说明方程(3)的轨线与 $x = b$ 相交，且

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2)} < \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3)}$$

所以 $f(A_2, I^+)$ 或者与正 x 轴相交，或与 $x = b$ 相交；若与 $x = b$ 相交，在区域 $D_7 = \{(x,y) \mid b < x < +\infty, y > 0\}$ 内 $\dot{x} > 0, \dot{y} < 0$ 即 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2)} < 0$，方程(2)的正向轨线经有限时间后必与正 x 轴相交。设与正 x 轴的交点为 A_3。

e) 方程(2)的从 A_3 出发的正向轨线 $f(A_3, I^+)$ 必与负 y 轴相交。

轨线 $f(A_3, I^+)$ 在区域 $D_8 = \{(x,y) \mid 0 < x < +\infty, y < 0\}$ 内由 a) 的证明知轨线 $f(A_3, I^+)$ 单调增加，由初值问题解的唯一性知，轨线不能自相交，所以 $f(A_3, I^+)$ 必与负 y 轴相交 A_4 且 $y_{A_4} > y_{A_0}$。

综上所述，环域的外境界线为 $A_0A_1A_2A_3A_4A_0$，所以存在稳定的极限环。

参考文献：

[1] 梁锦鹏．Liénard 方程极限环存在定理[J]．高校应用数学学报(A 辑)，2000，15(2)：163－168．

[2] 丁大正．Liénard 方程极限环的存在性[J]．应用数学学报，1984，7(2)：166－174．

[3] 伍卓群．非线性振动方程极限圈存在性[J]．东北人民大学学报，1956(2)：33－46．

[4] 余澍祥．极限环存在定理[J]．数学进展，1965，8(2)：187－194．

[5] 陈新一．方程 $\frac{dx}{dt} = \varphi(y) - F(x)$，$\frac{dy}{dt} = h(x,y) - g(x)$ 的极限环存在定理[J]．数学学报，1999，42(5)：853－858．

[6] 叶彦谦．极限环论[M]．上海：上海科学技术出版社，1965．

Existence of the Limit Cycles for Liénard Equation

ZHANG Mou

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Some sufficient conditions of the existence of limit cycles of the Liénard equation are discussed. In the course of proving the annular region theorem, annular region's interior or exterior boundary can be given by contracting method of the paper. So we can estimate generally the position of limit cycles of the systems. The existence of limit cycles for given equation is discussed in another theorem, in which the hypothesis of $G(\pm\infty) = +\infty$ is omitted. Our results are the corresponding results of [1] in the condition of $\varphi(y) = y$.

Key words: the limit cycle; the existence; the Liénard equation

(责任编辑　张　苹)