文章编号:1000－582X(2002)11－0100－04

# 存货影响销售率且销售价格可变的EOQ模型*

罗　兵,于会强
(重庆大学 工商管理学院,重庆 400044)

**摘　要**:1995年,Padmanabhan和Vrat建立了变质物品在价格恒定且存货影响销售率条件下的EOQ模型;2000年,Kun－Jen Chung, Peter Chu和Shaw－Ping Lan则在此基础上研究了无短缺量拖后和短缺量完全拖后时单位时间利润函数唯一最优解存在的充分和必要条件。实际上存货销售价格并非一定是常数,它经常随多种因素而变化。放宽这一条件,假定销售价格是外部需求的线性函数,建立了无短缺量拖后情况下变质物品在存货影响销售率且销售价格可变时的EOQ模型,并讨论了该模型具有全局唯一最优解的充分条件,最后给出一个算例进行说明,为库存系统的管理决策提供了理论依据。

**关键词**:存货影响销售率;可变销售价格;无短缺量拖后;EOQ模型
**中图分类号**:F253.4　　**文献标识码**:A

库存管理(Inventory Management)是生产管理中一个较为古老的分支,但近年来随着现代物流与供应链管理的兴起和发展,人们对这一领域的研究更加系统和深入,许多成果相继问世,出现了不少有应用价值的库存模型。值得一提的是,许多国外学者近年来已经注意到存货本身对需求率(或销售率)的影响。实际上,公司从业者和市场研究人员经常发现这种情况,产品在货架上摆放得越多,一般说来会吸引更多的顾客,这时的需求率显然与库存水平有关,这种现象被称作stock dependent selling rate(存货影响销售率)。存货影响销售一般有两种类型,一种是销售率是订购批量(初始库存水平)的函数,另一种是销售率是任意时刻库存水平的函数。Gupta和Vrat[1] 1986年首先研究了销售环境条件下使成本最小化的库存模型,并假定存货影响销售率是初始库存水平的函数。Padmanabhan和Vrat[2] 1988年定义了存货影响销售率是任意时刻库存水平的函数,并研究了非销售环境条件下的库存模型。其他一些研究者也对存货影响销售率这一现象进行过诸多深入的研究,如Baker和Urban[3](1988),Mandal和Phaujdar[4-5](1989 a,b),Datta和Pal[6-7](1990 a,b),Vrat和Padmanabhan[8](1990),Padmanabhan和Vrat[9](1990),Urban[10](1992),Goh[11-12](1992,1994),Pal,et al.[13](1993),Bar－Lev,et al.[14](1994),Su,et al.[15](1996),Giri,et al.[16](1996)和Sarker,et al.[17](1997)。除此之外,典型的研究还有,1995年,Padmanabhan和Vrat[18]提出了变质物品在存货影响销售率情况下的库存模型,他们假设销售率是目前库存水平的函数,变质率是常数,在零提前期的瞬时补充条件下,建立了无短缺量拖后、短缺量完全拖后和部分短缺量拖后时的3种库存模型;2000年,Kun－Jen Chung, Peter Chu和Shaw－Ping Lan[19]在Padmanabhan和Vrat[18]研究的基础上,探讨了无短缺量拖后和短缺量完全拖后时单位时间利润函数的特性,用两个定理分析和证明了两种情形下单位时间利润函数最优解存在的充分和必要条件,并指出可用Newton－Raphson方法来确定单位时间利润函数的最优周期。

Padmanabhan和Vrat[18]以及Kun－Jen Chung, Peter Chu和Shaw－Ping Lan[19]都假定存货的销售价格是固定不变的,而实际上价格通常随需求而变动,笔者对无短缺量拖后时销售价格可变的情况进行了讨论。

## 1　符号与假定

为建立模型,作如下假定:

1) $t$时刻的需求率$D(t)=\alpha+\beta I(t)$,其中$\alpha$为常数($\alpha>0$),$\beta$为存货影响销售率的系数($\beta>0$),$I(t)$为$t$时刻的库存水平;

2) 补充率为无穷大(即瞬时补货),订货提前期为零;

3) 无短缺量拖后,即不允许出现短缺量拖后;

* 收稿日期:2002－09－10
基金项目:重庆集诚汽车电子有限责任公司生产管理系统优化基金资助
作者简介:罗兵(1964－),男,重庆人,副教授,博士。主要从事生产运作管理及供应链管理的研究。

4) 物品变质的时间服从参数为 $\theta$ 的指数分布，且 $\theta$ 为常数；

5) $C$ 为物品本身的成本，$i$ 为单位物品单位时间的库存费用率；

6) $A$ 为一次订购成本；

7) $T$ 为一个周期的时间，$Q$ 为订购批量；

8) $P$ 为单位存货售价，它是需求率 $D(t)$ 的函数，通常情况下价格与需求成负相关关系，即销售定价越高，则外界对产品的需求就越低，因此不妨令 $P = P_0 - \gamma[\alpha + \beta I(t)]$，其中 $P_0$ 为定常需求时的理论价格，$\gamma$ 为常数，且 $P_0 - \gamma[\alpha + \beta I(t)] > C$；

9) $S_T$ 为每周期的销售收入，$C_T$ 为每周期的存货材料成本，$H_T$ 为每周期的储备成本，$P(T)$ 为每周期的单位时间利润函数；

10) 存货策略为 EOQ 类型的连续重复订货策略。

## 2　模型的建立及最优解的讨论

$t$ 时刻的存货水平如下：

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \theta I(t) = -[\alpha + \beta I(t)], 0 \leqslant t \leqslant T \quad (1)$$

考虑到边界条件 $I(T) = 0$，(1) 式的解为：

$$I(t) = \frac{\alpha}{\beta + \theta}[\mathrm{e}^{(\beta+\theta)(T-t)} - 1] \quad (2)$$

每周期的销售收入

$$S_T = \int_0^T \{P_0 - \gamma[\alpha + \beta I(t)]\}[\alpha + \beta I(t)]\mathrm{d}t = P_0\alpha T + \left[\frac{P_0\alpha\beta}{(\beta+\theta)^2} - \frac{2\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\theta)^2} + \frac{\gamma\alpha^2\beta^2}{(\beta+\theta)^3}\right] \cdot \{\mathrm{e}^{(\beta+\theta)T} - 1 - T(\beta+\theta)\} - \gamma\alpha^2 T - \frac{\gamma\alpha^2\beta^2}{2(\beta+\theta)^3}[\mathrm{e}^{(\beta+\theta)^T} - 1]^2 \quad (3)$$

每周期的存货材料成本

$$C_T = \frac{\alpha}{\beta+\theta}[\mathrm{e}^{(\beta+\theta)^T} - 1]C \quad (4)$$

每周期的储备成本

$$H_T = \int_0^T I(t)Ci\mathrm{d}t = \frac{Ci\alpha}{(\beta+\theta)^2}[\mathrm{e}^{(\beta+\theta)^T} - 1 - T(\beta+\theta)] \quad (5)$$

每次订购成本 = $A$

每周期的单位时间利润函数

$$P(T) = (S_T - C_T - H_T - A) \div T \quad (6)$$

$$P(T) = \frac{\alpha}{(\beta+\theta)^3 T}\{(\beta+\theta)[P_0\beta - C(i+\beta+\theta)] - 2\alpha\beta\theta\gamma\}[\mathrm{e}^{(\beta+\theta)^T} - T(\beta+\theta) - 1] + \left[(P_0\alpha - C\alpha - \gamma\alpha^2) + \frac{\gamma\alpha^2\beta^2}{(\beta+\theta)^2}\right] - \frac{\gamma\alpha^2\beta^2\mathrm{e}^{2(\beta+\theta)T}}{2(\beta+\theta)^3 T} + \left(\frac{\gamma\alpha^2\beta^2}{2(\beta+\theta)^3} - A\right)\frac{1}{T} \quad (7)$$

$P(T)$ 函数的一阶导数为：

$$\frac{\mathrm{d}P(T)}{\mathrm{d}T} = \frac{\alpha\{(\beta+\theta)[P_0\beta - C(i+\theta+\beta)] - 2\alpha\beta\theta\gamma\}}{(\beta+\theta)^3 T^2} \cdot [(\beta+\theta)T\mathrm{e}^{(\beta+\theta)T} - \mathrm{e}^{(\beta+\theta)T} + 1] - \frac{\gamma\alpha^2\beta^2[2(\beta+\theta)T\mathrm{e}^{2(\beta+\theta)T} + 1 - \mathrm{e}^{2(\beta+\theta)T}]}{2(\beta+\theta)^3 T^2} + \frac{A}{T^2} \quad (8)$$

$P(T)$ 函数的二阶导数为：

$$\frac{\mathrm{d}^2 P(T)}{\mathrm{d}T^2} = -\frac{\gamma\alpha^2\beta^2\{[4(\beta+\theta)^2T^2 - 4T(\beta+\theta) + 2]\mathrm{e}^{2(\beta+\theta)^T} - 2\}}{2(\beta+\theta)^3 T^3} - \frac{2A}{T^3} + \frac{\alpha\{(\beta+\theta)[P_0\beta - C(i+\beta+\theta)] - 2\alpha\beta\theta\gamma\}\{[(\beta+\theta)^2T^2 - 2(\beta+\theta)T + 2]\mathrm{e}^{(\beta+\theta)^T} - 2\}}{(\beta+\theta)^3 T^3} \quad (9)$$

**定理**　每周期单位时间利润函数 $P(T)$ 有唯一最大值点的充分条件是 $(\beta+\theta)[P_0\beta - C(i+\beta+\theta)] - 2\alpha\beta\theta\gamma \leqslant 0$。

为证明方便，给出以下两个引理。

**引理 1**　当 $(\beta+\theta)[P_0\beta - C(i+\beta+\theta)] - 2\alpha\beta\theta\gamma \leqslant 0$ 时，$P(T)$ 函数有极大值，且 $P'(T)$ 单调递减。

**证明**

不妨令 $(\beta+\theta)T = x$，则

$$f(T) = [(\beta+\theta)^2T^2 - 2(\beta+\theta)T + 2]\mathrm{e}^{(\beta+\theta)T} - 2 \quad (T > 0) \quad (10)$$

可转化为

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x - 2 \quad (x > 0) \quad (11)$$

求导得 $f'(x) = x^2\mathrm{e}^x$

当 $x > 0$ 时，$f'(x) > 0$

$f(x)$ 单调递增，有 $f(x) \geqslant f(x)\min = f(0) = 0$

$f(T) = [(\beta+\theta)^2T^2 - 2(\beta+\theta)T + 2]\mathrm{e}^{(\beta+\theta)T} - 2 > 0$

同理令 $2(\beta+\theta)T = x$，则

$$g(T) = [4(\beta+\theta)^2T^2 - 4(\beta+\theta)T + 2]\mathrm{e}^{2(\beta+\theta)T} - 2 > 0 \quad (T > 0) \quad (12)$$

由 $(\beta+\theta)[P_0\beta - C(i+\beta+\theta)] - 2\alpha\beta\theta\gamma \leqslant 0$，

$$\frac{\gamma\alpha^2\beta^2}{2(\beta+\theta)^3} > 0,$$

$$\frac{\alpha\{(\beta+\theta)[P_0\beta - C(i+\beta+\theta)] - 2\alpha\beta\theta\gamma\}}{(\beta+\theta)^3T^3}f(T) - \frac{\gamma\alpha^2\beta^2}{2(\beta+\theta)^3T^3}g(T) - \frac{2A}{T^3} < 0 \quad (T > 0)$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}^2P(T)}{\mathrm{d}T^2} < 0$$

故 $P(T)$ 函数有极大值，且 $P'(T)$ 单调递减。

**引理 2**　当 $(\beta+\theta)[P_0\beta - C(i+\beta+\theta)] - 2\alpha\beta\theta\gamma \leqslant 0$ 时，$P(T)$ 有唯一极大值 $P(T^*)$。

**证明**

记 $F(T) = \dfrac{(\beta+\theta)T\mathrm{e}^{(\beta+\theta)T} - \mathrm{e}^{(\beta+\theta)T} + 1}{T^2}$

$$\lim_{T\to 0^+} F(T) = \lim_{T\to 0^+}\frac{(\beta+\theta)\mathrm{e}^{(\beta+\theta)T} + (\beta+\theta)^2T\mathrm{e}^{(\beta+\theta)T} - (\beta+\theta)\mathrm{e}^{(\beta+\theta)T}}{2T} =$$

$$\lim_{T\to 0^+}\frac{(\beta+\theta)^2 e^{(\beta+\theta)T}}{2}=\frac{(\beta+\theta)^2}{2} \tag{13}$$

记 $G(T)=\dfrac{2(\beta+\theta)Te^{2(\beta+\theta)T}-e^{2(\beta+\theta)T}+1}{T^2}$

$$\lim_{T\to 0^+}G(T)=\lim_{T\to 0^+}\frac{4(\beta+\theta)^2 Te^{2(\beta+\theta)T}}{2T}=2(\beta+\theta)^2 \tag{14}$$

$$\lim_{T\to 0^+}P'(T)=$$

$$\lim_{T\to 0^+}\frac{\alpha\{(\beta+\theta)[P_0\beta-C(i+\beta+\theta)]-2\alpha\beta\theta\gamma\}}{(\beta+\theta)^3}F(T)-\frac{\gamma\alpha^2\beta^2}{2(\beta+\theta)^3}G(T)+\frac{A}{T^2}$$

综合(14)、(15),有:

$$\lim_{T\to 0^+}P'(T)\to+\infty>0$$

即有

$$P'(0)\to+\infty>0 \tag{15}$$

又 $\lim\limits_{T\to+\infty}F(T)=\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{(\beta+\theta)^2 e^{(\beta+\theta)T}}{2}\to+\infty>0$ (16)

$$\lim_{T\to+\infty}G(T)=\lim_{T\to+\infty}[2(\beta+\theta)^2 e^{2(\beta+\theta)T}]\to+\infty>0 \tag{17}$$

所以有:

$$\lim_{T\to+\infty}P'(T)=$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{\alpha\{(\beta+\theta)[P_0\beta-C(i+\beta+\theta)]-2\alpha\beta\theta\gamma\}}{(\beta+\theta)^3}F(T)-\frac{\gamma\alpha^2\beta^2}{2(\beta+\theta)^3}G(T)+\frac{A}{T^2}$$

综合(16)、(17),有:

$$\lim_{T\to+\infty}P'(T)\to-\infty<0$$

又因为 $P'(T)$ 单调递减,所以当 $T>0$ 时,$P'(T)=0$ 有唯一的解 $T^*$。

由引理1和引理2可知,$(\beta+\theta)[P_0\beta-C(i+\beta+\theta)]-2\alpha\beta\theta\gamma\leqslant 0$ 是 $P(T)$ 函数有唯一最大值点的充分条件,于是原定理得证。

## 3 算 例

某公司欲制定计划期内的产品采购计划，已知该产品的需求与其库存水平和时间有关，$D(t)=10+0.25I(t)$,存货的单位成本 $C$ 为 15 元,单位物品单位时间的库存费用率 $i$ 为0.5元,保存过程中变质系数 $\theta=0.10$,公司销售该存货时,对价格作出如下预测,认为价格随外界需求的变化率 $\gamma=0.15$,不受外界需求影响的理论值 $P_0=20$ 元,试问该公司是否有唯一最优库存策略?

按笔者给出的条件,$(\beta+\theta)[P_0\beta-C(i+\beta+\theta)]-2\alpha\beta\theta\gamma\leqslant 0$,将上述数据代入并通过计算可知 $(\beta+\theta)[P_0\beta-C(i+\beta+\theta)]-2\alpha\beta\theta\gamma=-2.7875<0$,即该公司有唯一最优库存策略。

另外,如 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$、$\theta$、$C$、$i$ 等参数保持不变,$P_0$ 必须满足下列条件才能使该公司有唯一最优库存策略,$P_0\leqslant\dfrac{2\alpha\beta\theta\gamma}{\beta(\beta+\theta)}+\dfrac{C(i+\beta+\theta)}{\beta}=51.85$

综上所述,理论定价 $P_0$ 有一个上界和下界,只要 $P_0$ 在此范围内波动,公司的最优库存策略就存在而且唯一,下表是 $\beta$ 和 $\gamma$ 变动对理论定价 $P_0$ 的影响。

表 1 $\beta$ 变动对理论价格 $P_0$ 的影响

| $\alpha$ | $\beta$ | $\theta$ | $\gamma$ | $i$ | $C$ | $P_0$ 变动范围 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.50 | 15 | $P_0\leqslant 195$ |
| 10 | 0.15 | 0.10 | 0.15 | 0.50 | 15 | $P_0\leqslant 76$ |
| 10 | 0.25 | 0.10 | 0.15 | 0.50 | 15 | $P_0\leqslant 52$ |
| 10 | 0.35 | 0.10 | 0.15 | 0.50 | 15 | $P_0\leqslant 42$ |
| 10 | 0.50 | 0.10 | 0.15 | 0.50 | 15 | $P_0\leqslant 34$ |

表 2 $\gamma$ 变动对理论价格 $P_0$ 的影响

| $\alpha$ | $\beta$ | $\theta$ | $\gamma$ | $i$ | $C$ | $P_0$ 变动范围 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.25 | 0.10 | 0.10 | 0.50 | 15 | $P_0\leqslant 51.57$ |
| 10 | 0.25 | 0.10 | 0.15 | 0.50 | 15 | $P_0\leqslant 51.86$ |
| 10 | 0.25 | 0.10 | 0.25 | 0.50 | 15 | $P_0\leqslant 52.42$ |
| 10 | 0.25 | 0.10 | 0.35 | 0.50 | 15 | $P_0\leqslant 52.99$ |
| 10 | 0.25 | 0.10 | 0.50 | 0.50 | 15 | $P_0\leqslant 53.86$ |

从表1可以看出,$P_0$ 随 $\beta$ 的增大而减小其上界值,也即当商品库存水平对外界需求影响较大时,其理论定价不宜过高,否则企业没有最优库存策略;而当商品的库存水平对外界需求影响较小时,定价有较大的空间。从表2可以看出,$P_0$ 也随 $\gamma$ 的增大而增大,但增长率较低,这表明当价格对需求影响较大时,理论定价 $P_0$ 的上界变动空间较大。

## 4 结 论

通过假设存货销售价格与外部需求成负线性相关关系,建立了无短缺量拖后情况下变质物品在存货影响销售率且销售价格可变时的 EOQ 模型,用两个引理和一个定理分析和证明了单位时间利润函数具有全局唯一最优解的充分条件,并给出一个算例进行说明。该问题还可作进一步的深入研究,可以对短缺量完全拖后和部分短缺量拖后时的情况进行讨论,也可假设理论需求率为线性时变函数、指数时变函数等,但这些工作都会增加数学分析和证明的难度。

**参考文献:**

[1] GUPTA R, VRAT P. Inventory model for stock - dependent consumption rate[J]. Opsearch, 1986, 23: 19 - 24.

[2] PADMANABHAN G, VRAT P. Inventory models for perishable items under stock dependent consumption rate [C]. Paper presented at the XXIst Annual ORSI Convention, Trivandrum,

India, 1988.

[3] BAKER R C, URBAN T L. A deterministic inventory system with an inventory - dependent demand rate[J]. Journal of the Operational Research Society, 1988, 39: 823 - 831.

[4] MANDAL B N, PHAUJDAR S. A Note on an inventory model with stock - dependent consumption rate[J]. Opsearch, 1989a, 26: 43 - 46.

[5] MANDAL B N, PHAUJDAR S. An inventory model for deteriorating items and stock - dependent consumption rate[J]. Journal of the Operational Research Society, 1989b, 40: 483 - 488.

[6] DATTA T K, PAL A K. Deterministic inventory systems for deteriorating item with inventory - level - dependent demand rate and shortages[J]. Opsearch, 1990a, 27: 213 - 224.

[7] DATTA T K, PAL A K. A note on an inventory model with inventory - level - dependent demand rate[J]. Journal of the Operational Research Society, 1990b, 41: 971 - 975.

[8] VRAT P, PADMANABHAN G. An inventory model under inflation for stock dependent consumption rate items [J]. Engineering Costs and Production Economics, 1990, 19: 379 - 383.

[9] PADMANABHAN G, VRAT P. An EOQ model for items with stock dependent consumption rate and exponential decay[J]. Engineering Costs and Production Economics, 1990, 18: 241 - 246.

[10] URBAN T L. An inventory model with an inventory - level - dependent demand rate and relaxed terminal conditions[J]. Journal of the Operational Research Society, 1992, 43: 721 - 724.

[11] GOH M. Some results for inventory models having inventory level dependent demand rate [J]. International Journal of Production Economics, 1992, 27: 155 - 160.

[12] GOH M. EOQ models with general demand and holding cost functions[J]. European Journal of Operational Research, 1994, 73: 50 - 54.

[13] PAL S, GOSWAMI A, CHAUDHURI K S. A deterministic inventory model for deteriorating items with stock - dependent demand rate [J]. International Journal of Production Economics, 1993, 32: 291 - 299.

[14] BAR - LEV S K, PARLAR M, PERRY D. On the EOQ model with inventory - level - dependent demand rate and random yield[J]. Operations Research Letters, 1994, 16: 167 - 176.

[15] SU C T, TONG L I, LIAO H C. An inventory model under inflation for stock dependent consumption rate and exponential decay[J]. Opsearch, 1996, 33: 71 - 82.

[16] GIRI B C, PAL S, GOSWAMI A, CHAUDHURI K S. An inventory model for deteriorating items with stock - dependent demand rate[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 95: 604 - 610.

[17] SARKER B R, MUKHERJEE S, BALAN C V. An order - level lot size inventory model with inventory - level dependent demand and deterioration[J]. International Journal of Production Economics, 1997, 48: 227 - 236.

[18] PADMANABHAN G, VRAT P. EOQ models for perishable items under stock dependent selling rate[J]. European Journal of Operational Research, 1995, 86: 281 - 292.

[19] KUN - JEN CHUNG, PETER CHU, SHAW - PING LAN. A note on EOQ models for deteriorating items under stock dependent selling rate[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 124: 550 - 559.

# An EOQ Model Taking Account of the Variable Selling Price Under Stock Dependent Selling Rate

*LUO Bing, YU Hui-qiang*

(College of Business Administration, Chongqing University, Chongqing 400044, china)

**Abstract**: In 1995, Padmanabhan and Vrat presented inventory models for deteriorating items with a constant selling price and stock dependent selling rate. Based on the result, in 2000, Kun - Jen Chung, Peter Chu and Shaw - Ping Lan devoloped the necessary and sufficient conditions of the existence and uniqueness of the optimal solutions of the profit per unit time functions without backlogging and with complete backlogging. Actually, the selling price need not be constant, it may be variable. This paper puts forward an EOQ model when the selling price is variable without backlogging, discusses the existence and uniqueness of optimum solution. The example is provided to illustrate the model. The theoretical evidence is provided for the inventory system to make management decision.

**Key words**: stock dependent selling rate; variable selling price; without backlogging; EOQ model

(责任编辑　陈移峰)