

文章编号: 1000 - 582X(2002)12 - 0058 - 04

# 3σ 准则在小波消噪中的应用

何世彪, 杨士中

(重庆大学通信工程学院, 重庆 400044)

**摘要:**小波多尺度分解是一种有效的信号去噪方法。对于非平稳信号的消噪, 主要是选取合适的小波及每层小波系数的阈值。笔者讨论了小波消噪的机理, 并提出一种新的取阈值方法。对于含噪声的非平稳信号, 信号的慢变化部分主要体现在小波分解的低频系数中, 而信号的突变部分和噪声主要反映在各层的高频分解系数中, 利用电子测量中的 3σ 准则, 可有效地将信号突变部分和噪声区分出来, 从而在消除噪声的同时保留信号的突变部分。

**关键词:**滤波器; 噪声; 小波分析; 3σ 准则

**中图分类号:** TP391

**文献标识码:** A

如何消除信号中的噪声, 是信号处理的永恒主题。传统的方法是采用滤波器滤除带外噪声。这种方式对非平稳信号处理时, 有明显不足, 因为非平稳信号有许多尖峰或突变, 这些尖峰或突变具有较高的频率, 采用传统滤波方式, 不能有效地将信号高频和由噪声引起的高频干扰加以区分。若低通滤波器带宽太窄, 则将一部分有用信号滤除掉了, 会引起信号的失真, 而低通滤波器带宽太大时, 则滤波后的信号中含有大量噪声, 达不到除噪的目的。利用小波对信号进行处理时, 实际上相当于对信号同时进行低通和高通滤波, 其低频系数主要反映信号信息, 而高频系数主要反映噪声和信号的细节信息。但信号的细节信息与噪声在高频分解系数中是有不同的表现形式, 可用适当的阈值将其筛选出来。对非平稳含噪信号进行多层小波分析, 对每层高频分解系数进行阈值处理后再合成, 可有效地达到滤除噪声和保留信号高频信息的目的, 它比传统的傅里叶变换方法有无可比拟的优越性。如何选择阈值便成为关键的问题, 笔者提出利用 3σ 准则确定每层小波分解系数的阈值。

## 1 小波消噪的机理<sup>[1]</sup>

### 1.1 信号的突变及尖峰在小波变换中表现

对任意信号  $x(t)$ , 其小波变换变换的表达式为

$$W_x(a, \tau) = \langle x, \Psi_{a,\tau} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \Psi^* \left( \frac{t-\tau}{a} \right) dt \quad (1)$$

其中:  $\Psi(t)$  为母小波,  $\Psi^*(t)$  是  $\Psi(t)$  共轭表示。

Mallat 在一系列探讨用小波变换检测信号边缘的文章中<sup>[2-3]</sup>, 直接用卷积的形式来定义小波变换, 即:

$$W_x(a, t) = \frac{1}{a} \int x(\tau) \Psi_a \left( \frac{t-\tau}{a} \right) d\tau = x(t) * \Psi_a(t) \quad (2)$$

其中,  $\Psi_a(t) = \frac{1}{a} \Psi \left( \frac{t}{a} \right)$ 。

虽然式(1)和式(2)在本质上是一致的, 但从严格意义上讲, 它们是有区别的, 关于它们的联系和区别, 请参见有关文献<sup>[4]</sup>。

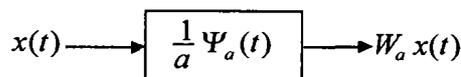


图1 按卷积定义的小波变换

因此, 信号  $x(t)$  的小波变换, 可看作是信号  $x(t)$

通过冲激响应为  $\frac{1}{a} \Psi_a(t)$  滤波器后的输出。

一般来说, 信号的突变和奇异点, 通常在信号的一阶或高阶导数中反映出来, 信号的极值可令  $x'(t) = 0$  来求得。下面来看看小波变换是如何来反映信号的突变和奇异点的情况的。

设  $\theta(t)$  为一平滑函数, 它为一滤波器的冲激响应。则  $x(t)$  经它处理后的输出可用如下公式表示:

• 收稿日期: 2002 - 07 - 06

作者简介: 何世彪(1963 - ), 男, 安徽怀宁人, 重庆通信学院教授, 重庆大学博士研究生, 主要研究领域有: 抗干扰通信技术、信息处理、电子测量与仪表等。

$$y(t) = x(t) * \theta(t)$$

根据卷积的性质,有:

$$y^{(n)} = x^{(n)} * \theta(t) = x(t) * \theta^{(n)}(t) \quad (3)$$

即是说,  $x(t)$  经  $\theta(t)$  平滑处理等效于  $x(t)$  经  $\theta(t)$  求导后的平滑处理。

对于一个平滑的低通函数,若其各阶导数存在,则根据傅里叶变换的微分定理,其各阶导数必定是带通的。因此,  $\Psi^{(1)}(t) = \frac{d\theta}{dt}$  和  $\Psi^{(2)}(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$  都可作为小波变换的母小波。

通过上面的分析,有如下结论成立:

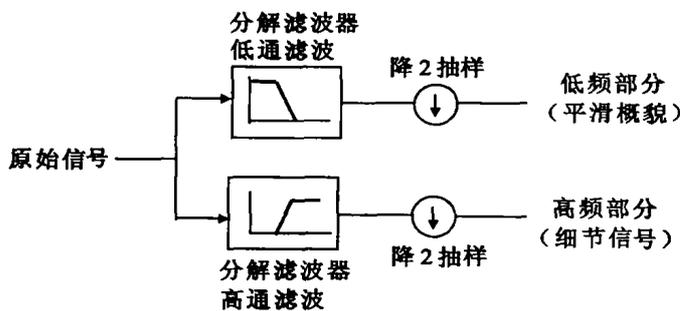
1) 如果  $\Psi^{(1)}(t)$  是某一低通平滑函数  $\theta(t)$  的一阶导数,则可用  $\Psi^{(1)}(t)$  对  $x(t)$  作小波变换。此时小波变换的零点正是  $\frac{dy}{dt} = 0$  之点,也就是  $y(t)$  的极值所在( $y(t)$  是  $x(t)$  被  $\theta(t)$  平滑的结果);小波变换的极值点是  $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$  之处,也就是  $y(t)$  的转折点,在极限情况(阶跃)下它也就是阶跃点。

2) 如果  $\Psi^{(2)}(t)$  是平滑函数  $\theta(t)$  的二阶导数,则可用  $\Psi^{(2)}(t)$  对  $x(t)$  作小波变换。此时小波变换的零点是  $y(t)$  的转折点( $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ );极限情况下也就是阶跃点。这些结论对小波伸缩后  $\Psi_a^{(1)}(t) = \frac{1}{a}\Psi^{(1)}\left(\frac{t}{a}\right)$  和  $\Psi_a^{(2)}(t) = \frac{1}{a}\Psi^{(2)}\left(\frac{t}{a}\right)$  同样适用。

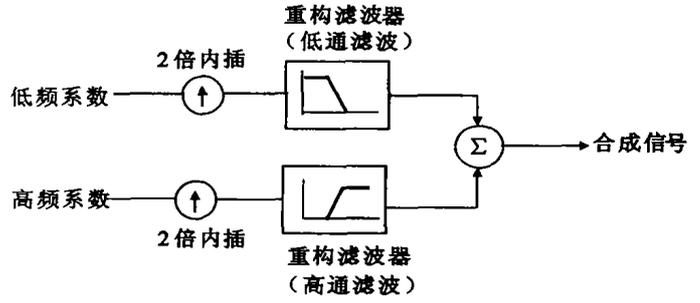
信号的突变点,有时是由小波变换的过零点或小波变换的极值点来反映的,它依据所选小波的不同而不同<sup>[4]</sup>,在这里就不展开分析。一般情况下选用合适的小波,用其变换的极值点来反映信号的突变。

### 1.2 噪声经小波变换后的表现

在实际的小波变换中,为方便运算,通常都用离散小波变换尤其是二进制小波变换,二进制小波变换等效为将信号进行低通和高通或带通(连续变换为带通)滤波,其过程如图 2 所示。



(a) 信号的小波分解图



(b) 信号的小波重构

图 2 二进制小波分析与重构

因此,噪声经小波变换后的情况分析,就等同于噪声经过滤波器后的情况,也即噪声经线性系统后的情况。小波的多分辨率分析,相当于对信号进行多层滤波,其分解结构如图 3(以 3 层为例)所示。在多尺度分析下,每增大一个尺度,相当于低通滤波器的通带减少一半,每次都对所分析的信号频带进行二分割处理。

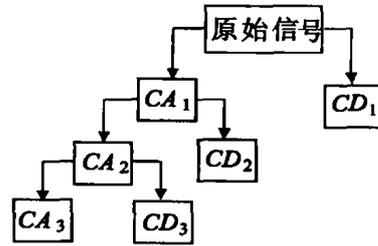


图 3 信号的多尺度分解

假设输入噪声为高斯噪声序列,其均值为 0,方差为  $\sigma^2$ ,对应的小波变换滤波器为  $h(n)$ ,则经滤波后的序列为  $y(n)$ ,则有:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

对于一般的小波滤波器的系数为有限值,设其取值范围为  $[0, M]$ ,则  $y(n) = \sum_{k=0}^M x(k)h(n-k)$  即是说,输出序列是输入序列的线性组合,而正态序列经线性组合后,仍为正态序列,但此序列已不是白色的,而是有色的。进一步,对于有色、平稳、零均值的高斯噪声序列,其小波分解系数仍然是高斯噪声序列。因此用小波对平稳的高斯噪声进行分解时,其不同层的高频分解系数仍为高斯序列,这是下面进行处理的基础。

## 2 非平稳信号受高斯噪声污染的消噪处理

假设原始信号是非平稳的记为  $m(t)$  如图 4(a) 所示,噪声为高斯白噪声记为  $n(t)$ ,其均值为 0,方差为  $\sigma^2$ ,受噪声污染的信号记  $s(t)$ ,如图 4(b) 所示。表达式为:

$$s(t) = m(t) + n(t) \quad (4)$$

对于这样的信号进行小波变换,由上面的分析可知,噪声在高频分解系数中表现仍为高斯噪声,而信号的高频的部分在分解系数中的表现为一系列的尖峰。如何将噪声分离,人们做了大量的研究,主要是探讨3个关键的方面,即:选取适当的小波、确立最佳的分解层数和选取合适的阈值。阈值的选择有许多方法<sup>[5]</sup>,但都有一定的局限性。笔者采用 $3\sigma$ 准则<sup>[6]</sup>,提取每层的阈值。 $3\sigma$ 准则通常用于测量误差的处理,主要功能是挑出测量误差中的粗大误差。基本思想是:由于随机误差是服从于正态分布,则误差的绝对值主要集中在均值(0)附近。用公式表示有:

$$P(|d| > 3\sigma) = 0.027 \quad (5)$$

因此,凡所测数据大 $3\sigma$ 的则认为是粗大误差,予以剔除。其剔除方法如下:

1) 计算均方差

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2\right)}$$

2) 求 $|d_i| (i = 1, 2, \dots, N)$ 的最大值 $|d|_{\max}$ ,若 $|d|_{\max} < 3\hat{\sigma}$ ,则认为没有粗大误差,否则到3)。

3) 剔除 $|d|_{\max}$ ,返回1)。

式中: $d_i$ 为测量误差, $N$ 为测量次数, $\hat{\sigma}$ 为随机误差的均方差。

对于有用信号与高斯噪声的迭加信号进行小波变换时,噪声在每层高频系数中仍是服从于高斯分布的随机序列,而信号的突变部分在小波的高频分解系数是表现为一系列脉冲,因而可将信号突出部分在小波分解系数中表现看作为“粗差”,而噪声的小波分解系数仍是高斯“误差”,从而运用 $3\sigma$ 准则检测出信号分量,并求出随机噪声的均方差 $\sigma$ 。每层的阈值为 $3\sigma$ 。

$3\sigma$ 准则主要是根据高斯噪声的分布特点来考虑的,对于高斯分布的噪声,若其均方差为 $\sigma$ ,则根据其分布规律,瞬时值绝对值大于 $3\sigma$ 的概率仅为3%,因可认为瞬时值大于 $3\sigma$ 的为粗大误差,加以除去。

对每层分解的高频系数(CD),运用如下步骤(即 $3\sigma$ 准则)确定 $\sigma$ 值。

1) 求初始均方差。

2) 比较每个 $CD_i$ 绝对值与 $3\hat{\sigma}$ 的大小,大于 $3\hat{\sigma}$ 的认为是粗差,予以除去。

3) 重新计算均方差。

4) 重复1)、2)、3),直至没有大于 $3\hat{\sigma}$ 的 $CD_i$ ,此时认为求出的 $\hat{\sigma}$ 值为噪声的均方差。

以 $3\hat{\sigma}$ 作为每层高频系数处理的阈值。即:系数绝对值小于 $3\hat{\sigma}$ 的置零,大于 $3\hat{\sigma}$ 系数保留。处理后的系数

再进行小波反变换,即得到消噪后的信号。

以此方法进行处理的结果为图4(d)所示。图4(c)是用matlab中软阈值方法进行消噪处理的结果。从图中可明显看出用 $3\sigma$ 准则消噪可较好地保留信号高频变化的部分,并且消噪效果好。

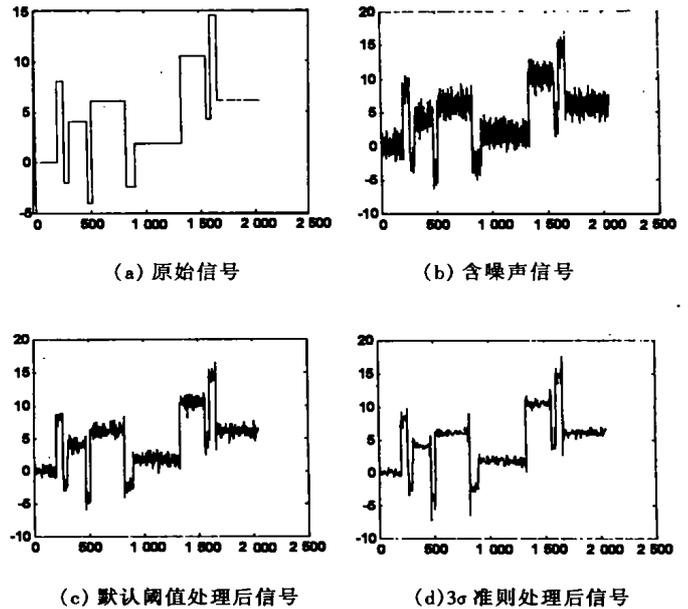


图 4 用不同方法进行小波消噪后的图形

### 3 结束语

给出的求阈值方法,比其它方法求阈值更为有效和合理,但它仅适用于污染噪声为高斯噪声,分解的高频系数绝大多数仍为噪声的情况,若高频分解系数主要为信号的特征,噪声的成份仅为小部分时,此种方法的效果会不太理想。

### 参考文献:

[1] 李建平.小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现[M].重庆:重庆出版社,2001.  
 [2] MALLAT S. Singularity detection and processing with wavelets [J]. IEEE Trans, 1992. LT-38(2), 617-643.  
 [3] MALLAT S. Characterization of signals from multiscale edges [J]. IEEE Trans, 1992, PAMI-14(7):710-732.  
 [4] 杨福生.小波变换的工程分析与应用[M].北京:科学出版社,2000.  
 [5] 胡昌华,张军波,夏军,等.基于MATLAB的系统分析与设计——小波分析[M].西安:西安电子科技大学出版社,1999.  
 [6] 蒋焕文,孙续.电子测量[M].北京:中国计量出版社,1989.

## Applied of $3\sigma$ -rule in Reducing Noise in Signal by Wavelet analysis

HE Shi-biao, YANG Shi-zhong

(College of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** It is a effective method to reduce the noise in signal by wavelet multiscale decomposition. The keys of reducing noise in nonstationary signals are to select good wavelet and thresholds for each layer wavelet decomposition coefficients. In this paper we discuss the principle of reducing noise in nonstationary signal by wavelet analysis and put forward a new method of getting thresholds. For nonstationary signals contained noise, the low frequency wavelet coefficients decomposed represent the parts of low change of signal, the high frequency wavelet coefficients decomposed represent the noise and the saltation of signal. It is very convenient to distinguish the parts of noise and saltation of signal by  $3\sigma$ -rule applied in electronic measurement. As a result, we can reserve the saltation of signal and reduce the noise.

**Key words:** filter; noise; wavelet analysis;  $3\sigma$ -rule

(责任编辑 吕赛英)

(上接第 57 页)

## Error Transfer's Analysis about Evaluation Criterion of a Rocket - Flight

GAO Bo, CHE Zhu-ming

(Xichang Satellite Launch Center, Xichang 615000, China)

**Abstract:** On the basis of the accuracy evaluation's demand of single impulse radar and other ground measure equipment, model of the inherent accuracy of ballistic camera as Evaluation's comparison criterion on fairway of a Rocket - Flight are worked out. Three respects analysis follows: 1) Will the criterion be able to be used? 2) In case of two laser ballistic camera having effective data, where does the one ballistic camera be as criterion? Where does the two ballistic camera be as criterion? 3) How can the speed be evaluated?

The formula, calculation method's simplification as well as the curve figure of the error transfer of the criterion are given and analysed. The model have been successfully used in single impulse radar's accuracy evaluation. It is a typical case of the accuracy analysis.

**Key words:** evaluation criterion; error transfer's analysis; accuracy analysis; rocket; radar accuracy

(责任编辑 吕赛英)