

文章编号: 1000 - 582X(2002)12 - 0062 - 04

光学小波变换中的 Mexican-hat 小波母函数特性

田逢春

(重庆大学通信工程学院, 重庆 400044)

摘要: 分析了一种可以用于光学小波滤波器的 Mexican-hat 小波母函数(墨西哥帽状小波), 讨论了其时-频局部化特性、容许性条件(重建条件)、正则性阶数、正交性等性质, 纠正了许多文献中关于二维母小波非张量积形式由一维母小波函数直接旋转得到的错误, 证明了 Mexican-hat 小波不能用作传统的计算机离散小波变换母函数, 但用于采用光学方法实现二维小波变换则有很好的能量集中特性。

关键词: 小波变换; 光学实现; Mexican-hat; 小波母函数

中图分类号: TN713

文献标识码: A

目前国内外学者对用光学方法实现小波变换并应用于模式识别、光纤传输等进行了研究, 总的说来, 用光学方法实现小波变换还处于起步阶段, 有许多问题需要探索, 其中影响其发展的很重要的一个因素是二维母小波函数的选取和构造, 尤其是在图像数据压缩和重建中, 要求所采用的小波满足“容许性”条件并具有很好的局部化特性。“容许性”条件使得在解压缩过程中能够精确地重建原图像; 好的局部化特性使得小波变换后图像的能量集中在小的局部范围, 从而实现高的数据压缩比。而对图像边缘提取, 则需要母小波有好的方向性而不必满足精确重建条件等等。根据不同的应用场合, 需要采用不同的二维母小波。

笔者就目前许多文献中所采用 Mexican-hat 小波母函数 (Mexican-hat)^[1-3] 的特性进行研究, 探讨 Mexican-hat 母函数作为光学滤波器传递函数时可以应用的场合, 证明了在离散小波变换中不能采用 Mexican-hat 函数作为母小波, 而在用光学实现的情况下却可以用其作为母小波, 同时也纠正了一个普遍易犯的概念错误。本文采用的符号表示方法如下:

Ψ 和 $\hat{\Psi}$ 分别表示函数的时域形式和其 Fourier 变换(频域)形式。

Fourier 变换对:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} \Psi(x) dx \\ \Psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} \hat{\Psi}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (1)$$

积分小波变换:

$$(W_{\Psi}f)(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{\Psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx = \langle f, \Psi_{ab} \rangle \quad (2)$$

积分小波反变换:

$$f(x) = \frac{1}{C_{\Psi}} \iint_{\mathbb{R}^2} (W_{\Psi}f)(b, a) \Psi_{ab}(x) \frac{da db}{a^2} \quad (3)$$

其中 $\Psi_{ab}(x) = |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ 是母小波 Ψ 经平移和尺度伸缩变换后得到的子波函数, $\langle f, \Psi_{ab} \rangle$ 代表函数 f 与 Ψ_{ab} 的内积, $\bar{\Psi}$ 代表 Ψ 的复共轭, 本文中的所有积分都是指勒贝格(Lebesgue)积分。

1 Mexican-hat 小波满足“容许性”条件

1.1 一维 Mexican-hat 母小波

Mexican-hat 小波的一维形式为:

$$\Psi(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (4)$$

其 Fourier 变换形式为:

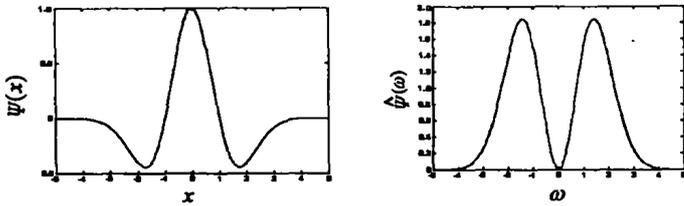
$$\hat{\Psi}(\omega) = \sqrt{2\pi}\omega^2 e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \quad (5)$$

因 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2)^2 e^{-x^2} dx = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$, 所以 $\Psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ 。 $\Psi(x)$ 和 $\hat{\Psi}(\omega)$ 的波形分别如图 1(a) 和图 1(b) 所示。

• 收稿日期: 2002 - 07 - 08

基金项目: 高等学校骨干教师资助项目(GG-510-10611-1031)

作者简介: 田逢春(1963-), 男, 重庆人, 重庆大学教授, 博士, 主要研究方向: 信号与信息处理, 通信与信息系统。



(a) 时域波形 $\Psi(x)$ (b) 频域波形 $\hat{\Psi}(\omega)$

图 1 一维 Mexican-hat 母小波的波形

定义 1 若函数 $\Psi \in L^2(R)$ 满足式(6)的“容许性”条件则称 Ψ 为一个“基小波”(或“母小波”)。

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (6)$$

若 $\hat{\Psi}$ 连续,则可推出满足“容许性”条件的一个必要条件: $\hat{\Psi}(0) = 0$ 。 Ψ 满足“容许性”条件则表明用 Ψ 作母小波对 $L^2(R)$ 空间中的任一函数 f 按式(2)进行积分小波变换后所得的结果经式(3)反变换后可以恢复原始函数 f 。这是对采用光学小波变换法实现图像数据压缩的一个必要条件,对于采用光学小波变换法进行模式识别或图像边缘检测等不需要进行反变换重建原图像的场所,则不要求一定满足“容许性”条件。可以算出一维 Mexican-hat 小波的 C_Ψ 为:

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2\pi < \infty$$

可见一维 Mexican-hat 小波满足“容许性”条件,是一个母小波函数,因此也称为 Mexican-hat 母小波。

1.2 二维 Mexican-hat 母小波

由于一维 Mexican-hat 小波函数 $\Psi(x)$ 满足“容许性”条件且可看作是一个二维函数的投影,根据文献[4]的定理 6.4,必然存在一个二维母小波函数,它是一维 Mexican-hat 母小波 $\Psi(x)$ 反投影的结果。二维 Mexican-hat 母小波的 Fourier 变换对为:

$$\Psi(x, y) = (2 - (x^2 + y^2))e^{-(x^2 + y^2)/2} \quad (7)$$

$$\hat{\Psi}(\omega_x, \omega_y) = 2\pi(\omega_x^2 + \omega_y^2)e^{-(\omega_x^2 + \omega_y^2)/2} \quad (8)$$

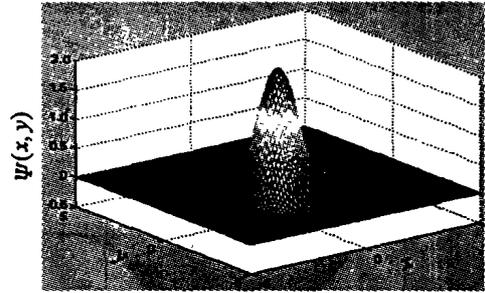
$\Psi(x, y)$ 和 $\hat{\Psi}(\omega_x, \omega_y)$ 的波形分别如图 2(a) 和图 2(b) 所示。

显然二维 Mexican-hat 小波满足径向性质,即:对平面上的任意两点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) ,只要它们与坐标原点的距离相同,则有 $\Psi(x_1, y_1) = \Psi(x_2, y_2)$,其二维 Fourier 变换 $\hat{\Psi}(\omega_x, \omega_y)$ 也满足径向性质,即 $\hat{\Psi}(\omega_x, \omega_y)$ 只是 Fourier 平面上点 (ω_x, ω_y) 与坐标原点的距离 t 的函数,简记为 $\hat{\Psi}(t)$ 。因此根据文献[5]的式(4.1.5),

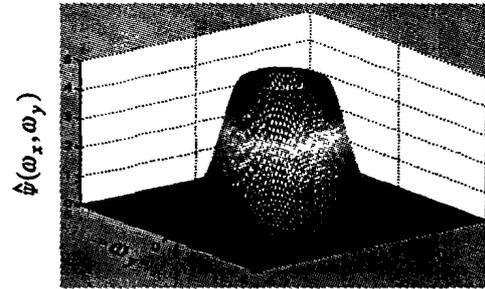
二维 Mexican-hat 小波的“容许性”条件变为:

$$C_\Psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(t)|^2}{t} dt = 4\pi^2 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2} dt = 2\pi^2 < \infty \quad (9)$$

可见二维 Mexican-hat 小波满足“容许性”条件,因此它也是一个母小波。



(a) 空域形式



(b) 频域形式

图 2 二维 Mexican-hat 母小波的波形

2 二维 Mexican-hat 母小波不是一维 Mexican-hat 母小波旋转的结果

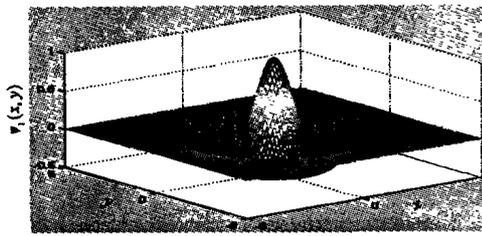
这里特别要纠正一些文献中常见的错误说法,人们常常将一维情况下得到的小波母函数直接旋转后推出二维下的形式(例如文献[1]的式(17)),若将本文式(4)旋转后则得到

$$\Psi_1(x, y) = (1 - (x^2 + y^2))e^{-(x^2 + y^2)/2} \quad (10)$$

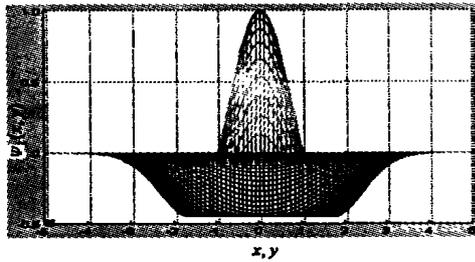
若把式(10)当作二维 Mexican-hat 母小波的表达式,则它不满足“容许性”条件,因为式(10)的 Fourier 变换不同于式(8),而是下述形式:

$\hat{\Psi}_1(\omega_x, \omega_y) = 2\pi(\omega_x^2 + \omega_y^2 - 1)e^{-(\omega_x^2 + \omega_y^2)/2}$ (11) 在二维连续函数的情况下,函数 $\Psi(x, y)$ 满足“容许性”的必要条件为 $\hat{\Psi}(0,0) = 0$,式(11)中的 $\hat{\Psi}_1(\omega_x, \omega_y)$ 是连续的,但 $\hat{\Psi}_1(0,0) = -2\pi$,不满足“容许性”条件的必要条件。因此式(10)不能用作需要重建原始图像的二维小波母函数。 $\Psi_1(x, y)$ 和 $\hat{\Psi}_1(\omega_x, \omega_y)$ 的波形

分别如图 3(a)、3(b) 和图 4(a)、4(b) 所示。

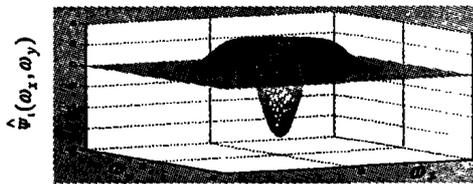


(a) 曲面图

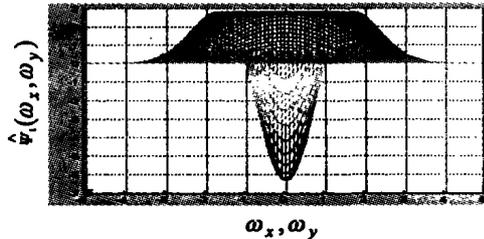


(b) 侧面图

图 3 $\Psi_1(x, y)$ 的波形



(a) 曲面图



(b) 侧面图

图 4 $\hat{\Psi}_1(\omega_x, \omega_y)$ 的波形

由图 3(a)、3(b)、4(a)、4(b) 以及式(10)、式(11) 可以附带得到一个结论,由一维 Mexican-hat 母小波函数经旋转后得到的二维曲面在空域和频域的波形除了上下方向相反、幅度值不一样外,其它都是一样的。也即它的 Fourier 变换前后的曲面形状是不变的。

3 Mexican-hat 母小波的子波不能构成 $L^2(R)$ 或 $L^2(R^2)$ 的标准正交基

3.1 一维 Mexican-hat 母小波的子波不能构成 $L^2(R)$ 的标准正交基

母小波函数若满足正交性条件,则可对尺度伸缩

系数 a 及平移系数 b 同时进行离散化,即在 $\Psi_{ab}(x) = |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ 中令 $a = 2^{-j}, b = 2^{-j}k$, 所得子波函数系列 $\Psi_{ab}(x) = \Psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \Psi(2^j x - k)$ 是相互正交的,即: $\langle \Psi_{jk}, \Psi_{lm} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{若 } j = l \text{ 且 } k = m \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 在此条件下式(3) 的积分变为下面的级数和形式:

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \Psi_{jk} \rangle \Psi_{jk}(x)$$

本文中用于判定一个函数是否是正交小波的母函数采用文献[6] 中的定理 3.23,这里重写如下。

定理 1 任一函数 $\Psi \in L^2(R)$ 是正交小波母函数的条件是其 Fourier 变换满足正交性条件

$$C_d = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega k} |\hat{\Psi}(\omega)|^2 d\omega = \begin{cases} 1 & \text{若 } k = 0 \\ 0 & \text{若 } k \neq 0 \end{cases} \quad (12)$$

将式(5) 代入式(12) 等号的左边,有:

$$C_d = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4 e^{-j\omega k} - \omega^2 d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{16} (k^4 - 12k^2 + 12) e^{-\frac{1}{4}k^2} \quad (13)$$

显然式(13) 不满足式(12),因此一维 Mexican-hat 母小波的子波 $\Psi_{jk}(x)$ 不能构成 $L^2(R)$ 的正交基。

3.2 二维 Mexican-hat 母小波的子波不能构成 $L^2(R^2)$ 的标准正交基

这里采用文献[5] 中的推论 2.4.2.4 作为证明的依据,重写如下。

定理 2 设 $\Psi_{jk}(x)$ 构成了 $L^2(R^d)$ 的标准正交小波基, x 代表 d 维矢量, $L^2(R^d)$ 代表 d 维平方可积函数构成的空间,则当 $\Psi(x)$ 不恒为 0 时,下述两性质不同时成立:

$$1) \Psi(x) \text{ 指数衰减} \quad (14)$$

$$2) \Psi \in C^\infty, \Psi^{(l)} \text{ 有界}, \forall l \quad (15)$$

由定理 2 可推出:

定理 3 二维 Mexican-hat 母小波的平移和伸缩不能构成 $L^2(R^2)$ 的标准正交小波基。

证明 用反证法。由于

$$\int_{R^2} |\Psi(x, y)|^2 dx dy = \int_{R^2} |(2 - x^2 - y^2) e^{-(x^2+y^2)/2}|^2 dx dy = 2\pi, \text{ 可见 } \Psi(x, y) \in L^2(R^2), \text{ 将定理 2 的 } d \text{ 维情况应用于二维情况下, 将其中的 } d \text{ 维平方可积函数构成的空间 } L^2(R^d) \text{ 用二维平方可积函数构成的空间 } L^2(R^2) \text{ 代替, } \Psi(x) \text{ 用}$$

$\Psi(x, y) = (2 - (x^2 + y^2))e^{-(x^2+y^2)/2}$ 代替, 显然 $\Psi(x, y)$ 同时满足式(14) 和式(15) 的性质且不恒为 0。设若二维 Mexican-hat 母小波 $\Psi(x, y)$ 的平移和伸缩 $\Psi_{jk}(x, y)$ 能构成 $L^2(R^2)$ 的标准正交小波系, 则 $\Psi(x, y)$ 不应同时满足式(14)、式(15) 的性质, 与已知矛盾, 故假设不成立, 由此得证。

4 Mexican-hat 母小波函数具有任意阶的正则性阶数

正则性阶数是函数光滑程度或“奇异性”的一种描述, 一般情况下, 小波母函数的正则性阶数越高, 则函数的曲线(曲面) 越光滑, 图像数据压缩后重建的视觉效果就越好。采用正则性阶数的 Sobolev 定义为:

$$\text{若 } \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2r+1} |\hat{\Psi}(\omega)| d\omega < \infty \quad (16)$$

则称函数 $\Psi(x)$ 具有 r 阶正则性。将式(4) 带入式(16) 有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2r+1} |\hat{\Psi}(\omega)| d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi} \omega^{2r+3} e^{-\omega^2/2} d\omega = 0 \quad (17)$$

式(17) 恒为零的原因是被积函数是一个奇函数。式(17) 说明 Mexican-hat 母小波函数非常光滑, 具有任意大的正则性阶数; 在二维情况下可以得到类似的结论。

5 Mexican-hat 母小波函数同时具有时域和频域的局部化特性

一个函数 $\Psi(x)$ 若同时满足式(18)、式(19), 则认为函数 $\Psi(x)$ 具有好的局部化特性(也称 Ψ 是窗函数)。

$$\Psi(x) \in L^2(R) \quad (18)$$

$$x\Psi(x) \in L^2(R) \quad (19)$$

由 1.1 节知, Mexican-hat 母小波函数 $\Psi(x) \in L^2(R)$, 根据 Parseval 定理可知 $\hat{\Psi}(\omega) \in L^2(R)$, 将式(4)、式(5) 分别代入式(19), 可以计算出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(1-x^2)^2 e^{-x^2} dx = \frac{7}{8} \sqrt{\pi} < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega\hat{\Psi}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^6 e^{-\omega^2} d\omega = \frac{15}{4} \pi \sqrt{\pi} < \infty,$$

这表明 $x\Psi(x) \in L^2(R)$ 且 $\omega\hat{\Psi}(\omega) \in L^2(R)$, 因此 Mexican-hat 母小波函数在时域和频域都是窗函数, 因此具有时-频局部化特性, 根据文献[6] 的结论可推

出 Mexican-hat 母小波函数的另一个非常有用的性质:

Ψ 和 $\hat{\Psi}$ 同时属于 $L^1(R)$ 和 $L^2(R)$ 空间且一致连续, $\Psi(\pm\infty) = 0, \hat{\Psi}(\pm\infty) = 0$

由于二维 Mexican-hat 母小波满足径向性质, 因此类似地可以推出二维 Mexican-hat 母小波函数具有同样的时-频局部化特性。

6 结 论

1) 在用传统计算机离散小波变换方案中, 不采用 Mexican-hat 母小波作为小波母函数, 因为它的平移和伸缩不能构成 $L^2(R)$ 的标准正交基; 而在小波变换的光学实现中, 由于采用了光学相关器, 可以直接实现积分小波变换, 且因 Mexican-hat 母小波满足容许性条件, 可以精确重建小波变换前的原始图像, 所以对于采用光学小波变换法实现图像数据压缩时可以考虑用它作为小波变换的母函数。

2) 由于 Mexican-hat 母小波函数具有任意阶的正则性, 因此采用其实现小波变换后有很好的时-频局部化特性(能量集中)。

3) 由于 Mexican-hat 母小波是时域和频域的窗函数, 因此它同时具有较好的时域和频域局部化特性, 它同时属于 $L^2(R)$ 和 $L^1(R)$ 空间且一致连续。

4) 二维 Mexican-hat 母小波不是一维 Mexican-hat 母小波旋转的结果。

参考文献:

- [1] OUZIELI IDO, MENDLOVIC DAVID. Two-dimensional wavelet processor[J]. Applied Optics, 1996, 35(29): 5 839 - 5 846.
- [2] 陈鹤鸣, 施伟华, 贾小兵. 用计算全息制作改进的 Mexican-hat 子波匹配滤波器实现二维光学子波变换[J]. 中国激光, 1999, 26(5): 420 - 424.
- [3] 王文陆, 严瑛白, 金国藩, 等. 光学子波变换(3): 应用[J]. 光电子·激光, 1994, 5(6): 331 - 339.
- [4] 李建平, 田逢春, 曾理, 等. 小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现[M]. 重庆: 重庆出版社, 1997.
- [5] 龙瑞麟. 高维小波分析[M]. 北京: 世界图书出版公司, 1995.
- [6] 崔锦泰著. 小波分析导论[M]. 程正兴译. 西安: 西安交通大学出版社, 1997.

(下转第 73 页)

- 1999.
- [2] 潘松.VHDL 实用教程[M].成都:电子科技大学出版社, 2000.
- [3] 宋万杰.CPLD 技术及其应用[M].西安:西安电子科技大学出版社,1999.
- [4] 曾繁泰.可编程器件应用导论[M].北京:清华大学出版社,2001.
- [5] 曾繁泰.EDA 工程概论[M].北京:清华大学出版社,2002.
- [6] Altera 公司:MAX + PLUS II [Z].1997.

Eliminate the glitch in design of CPLD/FPGA

HE Wei, ZHANG Ling

(College of Communications Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Complex Programmable Logic Device (CPLD) and Field Programmable Gate Array (FPGA) play more and more important roles in design of modern digital system. But sometimes, the glitch in design of the system become handicap of succeedable design. This paper analyses the cause, judge and locate of glitch in design of modern digital system apply the component of CPLD/FPGA. Three methods about eliminate the glitch make use of EDA tools are discussed and some examples are given.

Key words: glitch; race and hazard; CPLD; FPGA; EDA

(责任编辑 吕赛英)

(上接第 65 页)

A Research on the Characteristics of Mexican-hat Mother Wavelet Used in Optic Realization

TIAN Feng-chun

(College of Communications Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: The Mexican-hat mother wavelet used in optic realization is analysed. Its characteristics on time-frequency domain localization, accurate reconstruction condition, regularity order and orthonormality are discussed. The error concept for the Mexican-hat wavelet that the non-tensor product two dimensional form of mother wavelet is obtained from the turning of its one dimensional form is corrected. The reason is explained for that the Mexican-hat mother wavelet can't be used in conventional discrete wavelet transform for image data compression, but when it is used in 2-D image wavelet transform realized by optic way, it features excellent energy localization.

Key words: wavelet transform; optic realization; Mexican-hat; mother wavelet

(责任编辑 张 革)