

层小波系数 $d_{j,k}$ 构成列向量 D_j 。

设信号长度为 N , 当 N 为奇数时, H 的列数为 N , 行数为 $\frac{N+L+1}{2} - 1$;

当 N 为偶数时, H 的列数为 N , 行数为 $\frac{N+L}{2} - 1$ 。

此时有分解算法

$$D_j = \bar{G}_j C_{j-1} = \bar{G}_j \bar{H}_{j-1} \cdots \bar{H}_1 C_0 \quad (3)$$

重建算法为

$$C_{j-1} = H_j^T C_j + G_j^T D_j \quad (4)$$

其中, H_k 与 H 的形式相同, G_k 与 G 的形式相同, 但 G_k 的列数 = H_k 的列数 = C_{k-1} 的行数。

2 基于小波变换的奇点及噪声检测

2.1 函数的局部奇异性和小波变换

通常, 用李普西兹指数 (Lipschitz) 来描述函数的局部奇异性。下面给出一个描述信号奇异性的定义。

定义 1 设 n 是一非负整数, $n \leq \alpha \leq n+1$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 是 Lipschitz α 的充要条件是存在着两个常数 A 和 $h_0 > 0$, 及 n 次多项式 P_n , 使得对任意的 $h \leq h_0$, 均有

$$|f(x_0 + h) - P_n(h)| \leq A |h|^\alpha \quad (5)$$

如果式(5)对所有点 $x_0 \in (a, b)$ 均成立, 且 $x_0 + h \in (a, b)$, 称 $f(x)$ 在 (a, b) 上是一致 Lipschitz α 。

利用小波分析这种局部奇异性时, 小波系数取决于 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域内的特性及小波变换所选取的尺度, 下面给出用小波变换检测信号奇点的方法^[4]。

2.2 小波变换信号噪声的检测^[5]

设 $\theta(x)$ 是磨光函数二阶可导, 满足:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) dx = 1 \text{ 和 } \theta(x) \rightarrow 0, \text{ 当 } |x| \rightarrow +\infty \text{ 时}$$

定义 $\Psi^l(x) = \frac{d}{dx} \theta(x)$, 则有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^l(x) dx = 0$,

所以 $\Psi^l(x)$ 是小波。引入记号 $f_s(x) = \frac{1}{s} f\left(\frac{x}{s}\right)$

定义 $W_s^l f(x) = f * \Psi^l(x)$, 则 $W_s^l f(x)$ 是信号 $f(x)$ 关于小波 $\Psi^l(x)$ 在尺度 s 和位置 x 上的规范小波变换。

由于信号与磨光函数 $\theta_s(x)$ 的卷积 $f * \theta_s(x)$ 就是磨光后信号, 原信号的奇点对应磨光后信号 $f * \theta_s(x)$ 的拐点以及 $W_s^l f(x)$ 的局部极值点。当尺度 s 很大时, 磨光后信号 $f * \theta_s(x)$ 消去了原信号中较小的变化, 仅能检测出变化比较大的尺度即低频信号部分, 因此, 对于不同的尺度 s , 可以检测出不同尺度下的奇点。

由于白噪声几乎处处奇异, 且 Lipschitz α 指数小于 0, 综合上面的论述可知: 随着尺度 s 的增大, 白噪声的模极大值将迅速下降。据此就可以识别出信号包含的噪声。

2.3 目前噪声识别手段的局限性

目前噪声的识别是针对信号的全部采样已经给定的情况下进行小波变换处理。在实时信号的情况下, 必须对当前采集的信号以及在前一阶段的采集信号全部进行处理, 无法利用前一阶段采集信号的处理结果。即当 C_0 的长度增加 1 成为 C'_0 时, 只有通过 $C'_1 = \bar{H}_1 C'_0$ 、 $D'_1 = \bar{G}_1 C'_0$ 重新计算第 1 层的剩余系数向量 C'_1 和小波系数向量 D'_1 , 而不能使用已经计算出的 C_1 和 D_1 的信息。同理, 第 j 层剩余系数向量 C'_j 和小波系数向量 D'_j 也必须重新计算。

显然, 用 Mallat 分解算法对当前采集到的全部信号进行处理的时间复杂度至少是 $O(N)$, 其中 N 为信号长度。若再对分解得到的小波系数向量 D'_j 进行噪声识别, 消噪后再重构原信号, 则对当前采集到的全部信号进行分解—噪声识别—消噪—重构所需的时间复杂度至少是 $O(N)$, 因此如果直接采用 Mallat 分解算法对实时信号进行分解—滤波—重构就不能满足实时要求。

3 实时信号中噪声的快速识别算法^[6]

3.1 信号长度变化对小波系数的影响

当信号长度从 N 增加到 $N+1$ 时, 考察 C_j 与 D_j 的变化。

设信号的范围在 $f(0) \sim f(N-1)$ 的基础上, 增加了 $f(N)$ 。令 C_0 表示由 $f(0) \sim f(N-1)$ 组成的列向量, C'_0 表示由 $f(0) \sim f(N)$ 组成的列向量。 D_j 是 C_0 的第 j 层小波系数, C_j 是 C_0 的第 j 层剩余系数, 对应的变换矩阵为 H_j 和 G_j 。 D'_j 是 C'_0 的第 j 层小波系数, C'_j 是 C'_0 的第 j 层剩余系数, 对应的变换矩阵为 H'_j 和 G'_j 。

1) 第 1 层小波系数 D'_1 的变化

当 G'_1 的列数为奇数时,

$$D'_1 = \bar{G}'_1 \cdot C'_1 = (\bar{G}'_1 \cdot C_0 \mid 0)^T + (0, \dots, 0, \bar{g}_0, \bar{g}_{-2}, \dots, \bar{g}_{1-b})^T \cdot f(N)$$

故 D'_1 和 $\begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 之差 $\Delta D_1 = (0, \dots, 0, \bar{g}_0, \bar{g}_{-2}, \dots, \bar{g}_{3-b}, \bar{g}_{1-b})^T \cdot f(N)$ (6)

当 G'_1 的列数为偶数时, 经过同样的分析可知:

D'_1 和 D_1 的元素个数相同, 且 D'_1 和 D_1 之差

$$\Delta D_1 = (0, \dots, 0, \bar{g}_1, \bar{g}_{-1}, \dots, \bar{g}_{2-b})^T \cdot f(N) \quad (7)$$

2) 第 2 层小波系数 D'_2 的变化

按 H'_1 的列数和 G'_2 的列数的奇偶性组合有 4 种情况, 在此仅给出一种情形: 当 H'_1 的列数为奇数时, 当 G'_2 的列数为偶数时,

$$D'_2 = \bar{G}'_2 \cdot \bar{H}'_1 \cdot C'_0 = \bar{G}_2 \cdot \bar{H}_1 \cdot C_0 + \bar{G}_2 \cdot (0, \dots, 0, \bar{h}_{b-1}, \bar{h}_{b-3}, \dots, \bar{h}_2)^T \cdot f(N) +$$

$$(0, \dots, 0, \bar{g}_0, \bar{g}_{-1}, \dots, \bar{g}_{2-b})^T \cdot f(N) \cdot \bar{h}_0$$

故 D'_2 与 D_2 的元素个数相同, 且 D'_2 与 D_2 之差

$$\Delta D_2 = \bar{G}_2 \cdot (0, \dots, 0, \bar{h}_{b-1}, \bar{h}_{b-3}, \dots, \bar{h}_2)^T \cdot f(N) + (0, \dots, 0, \bar{g}_1, \bar{g}_{-1}, \dots, \bar{g}_{2-b})^T \cdot f(N) \cdot \bar{h}_0 \quad (8)$$

3) 第 j 层小波系数 D'_j 的变化

将视 $G'_j, H'_{j-1}, H'_{j-2}, \dots, H'_1$ 的列数奇偶性组合 (有 2^k 种情况) 来确定, 分析与上面类似。

3.2 噪声的识别

上述分析表明, 当信号长度从 N 增加到 $N+1$ 时, 第 j 层小波系数的增量 ΔD_j 只和滤波器系数以及 $f(N)$ 有关, 且发生变化的小波系数的个数 m_j 恒定。由前述白噪声的判据已在前一阶段识别出当信号长度为 N 时的白噪声, 当信号长度从 N 增加到 $N+1$ 时, 只需要对 D_j 中的 m_j 个元素加上 ΔD_j , 根据 D'_j 中的模极大值的变化可识别随信号增加而出现的白噪声 (j 取有限个值)。显然该算法的时间复杂性为 $O(1)$ 。

4 应用结果

用上述方法对一火箭飞行的实时信号进行噪声识别。其中信号采样间隔 $T \geq 0.05$ s, 采样信号 2 500 个, 滤波器 h_n, g_n 取为 db8 小波, 信号分解有 3 层, 在 PIII 微机用上述方法处理, 当增加一个采样信号时, 新增噪声的识别耗时一般不超过 0.01 s (最多的不超过 0.05 s), 完全可以满足实时信号的处理要求。其耗时效果图 (排除信号的采集时间) 如图 1, 横轴为实时信号的序号, 纵轴为时间, 曲线表示在对第 K 个信号进行新增噪声的识别时所耗费的时间。

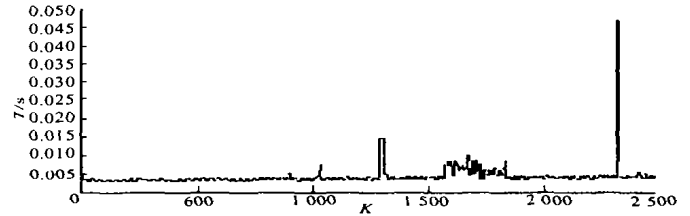


图 1 火箭飞行的实时信号进行在线噪声识别的时间

5 结束语

针对火箭飞行的实时信号进行在线噪声识别的快速算法, 能快速推断出新增信号带来的噪声, 大大减少了基于小波变换的噪声识别计算量, 使得火箭飞行数据的在线处理得以实现。该方法还可用于其它领域中的实时信号的在线处理, 利用该算法的思想还可以对图像等多维信号进行快速在线噪声识别和消除, 这将另文讨论。

参考文献:

- [1] 杨桦, 王渝红, 任震. 利用二进小波消除电动机故障信号白噪声[J]. 重庆大学学报, 1997, 20(4): 81-86.
- [2] CHUI C K. An Introduction To Wavelets[M]. San Diego (California): Academic Press, 1992.
- [3] DAUBECHIES I. Ten Lectures On Wavelets[M]. Montpelier (Vermont): Capital City Press, 1992.
- [4] GROSSMANN A, MORLET J. Decomposition of Hardy function into square integrable wavelets of construct shape[J]. SIAM J Math Anal, 1984, 15(4): 723-736.
- [5] MEYER Y. Wavelets: algorithms and applications[M]. Philadelphia: SIAM Publ, 1993.
- [6] 陈德智. 由小波变换的模极大值快速重构信号[J]. 电子学报, 1998; 26(9): 82-85.

Speedy Recognition of Noise in Real Time Signal Based on Wavelet Transform

HAN Feng-qing^{1,2}, HUANG Xi-yue¹, GAO Bo¹, LI Bin¹

(1. College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. Department of Computer Science, Chongqing Institute of Technology, Chongqing 400050, China)

Abstract: It's necessary to process position and gesture of rocket on real time within the flight of rocket. This work should base exact data. But much noise has been found in the data and the noise recognize is regarded as a focus. A speedy online arithmetic recognizing noise is proposed based on wavelet transform. The computing complexity measured by time of this arithmetic is a constant which is greatly reduces the works of calculation of wavelet transform. It can recognize the noise fast when the signal is gathered. The applications in these problems show that the effective arithmetic satisfies the needs of real time and can handle the real time data measured in other yields.

Key words: wavelet transform; online; recognition of noise

(责任编辑 张 苹)