文章编号:1000－582X(2002)02－0079－04

关于小波子空间上的具有紧支撑的采样定理*

杜 学 明,杨 万 年
(重庆大学 数理学院,重庆　400044)

摘　要:Shannon 采样定理对信息论的贡献是巨大的。但 Shannon 定理的采样函数在时域无紧支且衰减缓慢,对于紧支信号的采样显得极不方便。在前人对小波子空间采样定理系统研究的基础上,提出了广义基正交尺度函数的概念,证明了它是构造小波子空间上具有紧支的采样函数的充要条件,并研究了广义基正交正度函数的性质。

关键词:采样函数;采样定理;尺度函数;小波子空间

中图分类号:O 174.3　　　　**文献标识码**:A

我们知道,Shannon 采样定理对信息理论的发展起着重大的作用,它很好地解决了带限信号的采样与精确重建问题。

令 $f(t)\in L^2(R)$,$\hat{f}(\omega)$ 为 $f(t)$ 的傅氏变换,且当 $|\omega|\geq B(B>0)$ 时,$\hat{f}(\omega)=0$,则有如下的重构公式:

$$f(t)=\sum_{n\in Z}f(n\Delta)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-n\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-n\Delta)}$$

其中 $\Delta\leq\frac{\pi}{B}$ 为采样步长。

但由于Shannon采样定理采用Sinc函数 $\mathrm{sinc}(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}$ 作为插值基函数,它在时域无紧支性且衰减很慢,因此 Shannon 采样定理不能处理非带限信号,对紧支信号的采样重建问题更是无能为力。因此研究具有紧支集,衰减快,适合处理非带限信号的采样定理十分必要。

1　小波子空间上的采样定理

1992 年 walter[1] 考察了小波函数的性质,发现了小波函数是可以具有紧支和奇性[3] 的函数,并且从小波多分辨再生核 Hilbert 空间的观点出发,建立了基于小波子空间的采样处理,指出了满足一定条件的小波多分辨空间中的任一函数,可由小波子空间采样函数进行采样和重建。

定理 1　设 V_0 为多分辨分析的基本空间,$\phi(t)$ 为该空间的尺度函数,且满足:

a) $\phi(t)=O(|t|^{-1-\epsilon})$, $|t|\to\infty,\epsilon>0$

b) $\hat{\phi}^*(\omega)=\sum_{n\in Z}\phi(n)e^{-in\omega}\neq 0,-\infty<\omega<\infty$

如果函数 $S(t)=\sum_{n\in Z}a_n\phi(t-n)$ 满足:

$$\hat{S}(\omega)=\sum_{n\in Z}a_n e^{-in\omega}\hat{\phi}(\omega)=\hat{a}^*(\omega)\hat{\phi}(\omega)\qquad(1)$$

其中

$$\hat{a}^*(\omega)=\sum_{n\in Z}a_n e^{-in\omega}=\frac{1}{\hat{\phi}^*(\omega)}\qquad(2)$$

则 $S(t)$ 为小波子空间 V_0 的采样函数,且空间 V_0 中的任一函数 $f(t)$,有如下的重构公式:

$$f(t)=\sum_{n\in Z}f(n)S(t-n)$$

且上式右方级数是一致收敛的。

1993 年,Xia 等人[2] 引入了基尺度函数的概念并建立了基于基尺度函数的采样定理及其性质,从而使小波采样定理研究又取得进展。

定义 1:若 $\phi(t)$ 满足

$$\phi(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n=\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$$

则称 $\phi(t)$ 为基尺度函数,若 $\phi(t)$ 还满足正交条件,则称 $\phi(t)$ 为正交基尺度函数。

定理 2　若信号 $f(t)$ 属于多分辨空间 $V_j(\phi)$,则

$$f(t)=\sum_{n\in Z}f(\frac{n}{2^j})\phi(2^jt-n)$$

成立的充要条件是 $\phi(t)$ 为基尺度函数。

* **收稿日期**:2001-09-18
作者简介:杜学明(1974－),男,四川阆中人,重庆大学硕士。主要从事小波分析研究。

定理 3 若尺度函数 $\phi(t)$ 和 h_k 满足 $\phi(t) = \sum_{n\in Z} h_k \phi(2t - n)$，则 $\phi(t)$ 为基正交尺度函数的充要条件为

$$H(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\widetilde{H}(2\omega)e^{i\omega}$$

其中 $H(\omega) = \sum_{n\in Z} h_k e^{ik\omega}$，$\widetilde{H}(\omega) = \sum_k \tilde{h}_k e^{ik\omega}$，$\tilde{h}_k = h_{2k+1}$，$\widetilde{H}(0) = 1$，$|\widetilde{H}(\omega)| = 1$。

2 小波子空间上的具有紧支的采样函数

具有紧支的小波尺度函数不能保证其对应的采样函数具有紧支集，即小波采样函数在时域上的支集可能是无限的，因此实际利用定理 1 重构紧支信号时，由于采样函数的非紧支性将导致不能精确重构原信号。因此，探讨如何生成有紧支的小波采样函数是很有必要的。

小波子空间上的采样函数 $S(t) = \sum_{n\in Z} \alpha_n \phi(t - n)$ 完全由尺度函数决定，显然要使采样函数为紧支，尺度函数须满足一定的条件。

显然，若 $\phi(t)$ 为紧支的尺度函数，则小波采样函数 $S(t)$ 为紧支的充要条件为 $S(t) = \sum_{n\in Z} \alpha_n \phi(t - n)$ 关于 $\phi(t - n)$ 的展开式为有限项。

定义 2：若 $\phi(t)$ 满足

$$\phi(n) = \begin{cases} c & n = N \\ 0 & n \neq N, n \in Z \end{cases} \quad (N \text{ 为某一整数}) \tag{3}$$

则称 $\phi(t)$ 为广义基尺度函数，若 $\phi(t)$ 还满足正交条件，则称 $\phi(t)$ 为广义基正交尺度函数。不失一般性，可令 $c = 1$。

定理 4 若尺度函数 $\phi(t)$ 满足：

a) $\phi(t) = O(|t|^{-1-\epsilon})$，$|t| \to \infty$，$\epsilon > 0$

b) $\hat{\phi}^*(\omega) = \sum_{n\in Z} \phi(n)e^{-in\omega} \neq 0$，$-\infty < \omega < \infty$

c) $\phi(t)$ 具有紧支

则采样函数 $S(t)$ 存在，且 $S(t)$ 具有紧支的充要条件是 $\varphi(t)$ 为广度基正交尺度函数。

证明 由定理 1，当条件 a) 和 b) 满足时，$S(t)$ 存在且 $\forall f \in V_0$，有

$$f(t) = \sum_{n\in Z} f(n)S(t - n)$$

并且

$$S(t) = \sum_{n\in Z} \alpha_n \varphi(t - n)$$

在 $\varphi(t)$ 有紧支为前提下，$S(t)$ 有紧支的充要条件为 $\{\alpha_n\}$ 中仅有限个非零，故只需证明 $\{\alpha_n\}$ 具有有限个非零项的充要条件为 $\varphi(t)$ 是广义基正交尺度函数。

先证充分性：由 (1) 式，$\hat{\alpha}^*(\omega) = \sum_{n\in Z} \alpha_n e^{-in\omega}$ 满足如下关系式

$$\hat{\alpha}^*(\omega) = \frac{1}{\hat{\varphi}^*(\omega)} = \frac{1}{\sum_{n\in Z} \varphi(n)e^{-in\omega}}$$

由 $\varphi(t)$ 为广义基正交尺度函数，故存在某 $N \in Z$，使

$$\varphi(N) = 1, \varphi(n) = 0, n \neq N, n \in Z。$$

故

$$\hat{\alpha}^*(\omega) = \frac{1}{\varphi(N)e^{-iN\omega}} = \frac{1}{\varphi(N)}e^{-iN\omega} = \frac{1}{\varphi(N)}e^{-i(-N)\omega}$$

即 $\alpha_{-N} \neq 0, \alpha_n = 0, n \neq -N, n \in Z$

其次证明必要性：

若 α_n 具有有限项，不妨假设 $\alpha_n \neq 0$，$n = 0,1,2,\cdots,M$。由 (1) 式有 $\hat{\alpha}^*(\omega) = \sum_{n=0}^{M} \alpha_n e^{-in\omega}$ 且满足如下关系式：

$$\hat{\alpha}^*(\omega) = \frac{1}{\hat{\varphi}^*(\omega)} = \frac{1}{\sum_{n\in Z} \varphi(n)e^{-in\omega}}$$

即

$$\sum_{n=0}^{M} \alpha_n e^{-in\omega} = \frac{1}{\sum_{n\in Z} \varphi(n)e^{in\omega}} \tag{4}$$

因为 $\varphi(t)$ 具有紧支，故 $\varphi(n)(n \in Z)$ 中仅有有限个非零，不失一般性，不妨设 $\varphi(0), \varphi(1), \cdots, \varphi(N)$ 不为零。所以 (4) 式可写成

$$\sum_{n=0}^{M} \alpha_n e^{-in\omega} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \varphi(n)e^{-in\omega}}$$

即

$$\frac{1}{\varphi(0) + \varphi(1)e^{-i\omega} + \cdots + \varphi(N)e^{-iN\omega}} = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-i\omega} + \cdots + \alpha_M e^{iM\omega} \tag{5}$$

下证 $\varphi(0), \varphi(1), \cdots, \varphi(N)$ 中不可能有两项或两项以上为非零。若不然，记 $X = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_M)^T$，$b = (1, 0, \cdots, 0)^T$

并将 (5) 式写成矩阵的形式有

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} \varphi(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \varphi(1) & \varphi(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \varphi(2) & \varphi(1) & \varphi(0) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi(N) & \varphi(N-1) & \varphi(N-2) & \cdots & \varphi(N-M+1) & \varphi(N-M) \\ 0 & \varphi(N) & \varphi(N-1) & \cdots & \varphi(N-M+2) & \varphi(N-M+1) \\ 0 & 0 & \varphi(N) & \cdots & \varphi(N-M+3) & \varphi(N-M+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(N) & \varphi(N-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(N) \end{bmatrix}$$

显然，由最后 $M+1$ 个方程组成的齐次线性方程组只有零解，矛盾。即 $\varphi(0),\varphi(1),\cdots,\varphi(N)$ 中不可能有两个或两个以上为非零，因而 $\varphi(t)$ 为广义基正交尺度函数。

3　广度基正交尺度函数的性质

由于 $\varphi(t)\in V_0$ 为多分辨分析的尺度函数，故 $\varphi(f)$ 遵守二尺度方程：

$$\varphi(f)=\sum_{n\in Z}h_k\varphi(2t-k) \tag{6}$$

其中 h_k 满足：

$$\sum_{n\in Z}h_k=2 \tag{7}$$

若 $\varphi(t)$ 正交，则

$$\sum_{n\in Z}h_kh_{k-2m}=2\delta_m \tag{8}$$

由(6)式，得

$$\varphi(n)=\sum_{n\in Z}h_k\varphi(2n-k) \tag{9}$$

令 $u=2n-k$，则有

$$\varphi(n)=\sum_{n\in Z}h_{2n-u}\varphi(u) \tag{10}$$

若 $\varphi(t)$ 为广义基正交尺度函数，由(1)式，当 $u=N$ 时，$\varphi(u)=1$，当 $u\neq N$ 时，$\varphi(u)=0$。故(10)式即为

$$\varphi(u)=h_{2n-N},n\in Z \tag{11}$$

所以，当 $n=N$ 时，有

$$h_N=1 \tag{12}$$

当 $n\neq N$ 时，有

$$h_{2n-N}=1 \tag{13}$$

1° 当 N 为偶数时，令

$$\tilde{h}_k=h_{2k+1},k\in Z \tag{14}$$

由(7)、(8)、(12)和(13)式，有

$$\sum_{k\in Z}\tilde{h}_k=1,\sum_{k\in Z}\tilde{h}_k^2=1 \tag{15}$$

再令

$$\tilde{H}(\omega)=\sum_k\tilde{h}_k e_{ik\omega} \tag{16}$$

由(8)、(15)和(16)式有

$$\tilde{H}(0)=1,\ |\tilde{H}(\omega)|=1 \tag{17}$$

故

$$H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_k h_k e^{ik\omega}=\frac{1}{2}e^{iN\omega}+\frac{1}{2}\sum_k h_{2k+1}e^{i(2k+1)\omega}=\frac{1}{2}e^{iN\omega}+\frac{1}{2}\tilde{H}(2\omega)e^{i\omega} \tag{18}$$

2° 当 N 为奇数时，令

$$\tilde{h}_k=h_{2k} \tag{19}$$

则按(16)式定义的 $H(\omega)$ 仍有(17)式成立，相应的(18)式变为：

$$H(\omega)=\frac{1}{2}\sum^k h_k e^{ik\omega}=\frac{1}{2}e^{in\omega}+\frac{1}{2}\tilde{H}(2\omega) \tag{20}$$

逆推是显然的，因此有如下定理：

定理5　$\varphi(t)$ 为广义基正交尺度函数的充要条件是：

1° 当 N 为偶数为，$H(\omega)=\frac{1}{2}e^{iN\omega}+\frac{1}{2}\tilde{H}(2\omega)e^{i\omega}$

2° 当 N 为奇数为，$H(\omega)=\frac{1}{2}e^{iN\omega}+\frac{1}{2}\tilde{H}(2\omega)$

且 $\tilde{H}(0)=1,\ |\tilde{H}(\omega)|=1$

由定理5，我们有如下推论：

推论1　具有紧支集的广义基正交尺度函数的充要条件是：

1° 为 N 为偶数时，$h_N=1,h_{2k_0+1}=1$

2° 为 N 为奇数时，$h_N=1,h_{2k_0}=1$

其中 k_0 为某一整数。

证明：只须证明必要条件。下面我们证明 N 为偶数的情况，N 为奇数的证明类似。

设 $\varphi(t)$ 为广义基正交尺度函数，由定理5，

$$|\tilde{H}(\omega)|=\left|\sum_k h_{2k+1}e^{ik\omega}\right|=1,\forall\omega\in R$$

因为 $\varphi(t)$ 具有紧支集，所以存在整数 N_1 和 N_2，使得：

$$|\tilde{H}(\omega)|=\left|\sum_{k=-N_1}^{N_2}h_{2k+1}e^{ik\omega}\right|=$$

$$\left|\sum_{n=0}^{N_1+N_2} h_{2(k-N_1)+1} e^{ik\omega}\right| = 1$$

所以,存在某个整数 k_0,使得 $h_{2k_0+1} = 1$,而当 $k \neq k_0$ 时,$h_{2k+1} = 0$。

4 结 论

笔者在 Walter 和 Xia 等人工作的基础上提出了广义基正交尺度函数的概念。证明了它是构造紧支集的子波空间采样函数的充要条件,还详细地讨论了广义基正交尺度函数的性质。

参考文献:

[1] WALTER G G. A sampling theorem for wavelet subspace[J]. IEEE Trans Informat Theory, 1992,38:881-884.

[2] XIA XIANG-GAN,ZHANG ZHEN. A Sampling Theorem, Wavelets, and Wavelet Transforms[J]. IEEE Trans Signal Processing 1993, 41:3 524-3 535.

[3] DAUBECHIES I. Orthogonal bases of Compactly supported wavelets [J]. Comm Pure Appl Math 1988,41:909-996.

[4] DAUBECHIES I. Ten Lectures on Wavelets[M]. SIAM Philadelphia PA, 1992,129-214.

[5] TEWFIK A H. Completeness of arbitrarily sampled discrete time wavelet transforms[J]. IEEE Trans on signal processing, 1995, 43:2 570-2 581.

[6] DJOKOVIC I, VAIDYANATHAN P P. Generalized Sampling theorems in multiresolution subspaces[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1997,45:583-599.

[7] UNSER M, ZERUBIA J. A generalized sampling theory without band-limiting contraints[J]. IEEE on circutts and systems-Ⅱ analog and digital signal processing, 1998,45:959-969.

A Sampling Theorem with Compact Support for Wavelet Subspaces

DU Xue-ming, YANG Wan-nian

(College of Science, Chongqing University, Chonqing 400044)

Abstract: This paper disusses the sampling theorem and property for wavelet subspaces and cardinal orthogonal scaling function, on the basis of it, generilized cardinal orthogonal scaling function is presented, and it is proved that there is sufficient and necessary condition to construct sampling function with compact support for wavelet subspaces. Finally, the property of generilized cardinal orthogonal scaling functionl is studied.

Key words: sampling function; sampling theorem; scaling function; wavelet subspace

(责任编辑 张 苹)

·下期论文摘要预告·

金黄色葡萄球菌对中性粒细胞粘弹性的影响

宋关斌,刘保安,李新平,秦 建,蔡绍皙

(重庆大学 生物工程学院,重庆 400044)

摘 要:采用微管吸吮技术研究了中性粒细胞在外源病原微生物金黄色葡萄球菌刺激而免疫激活状态下的粘弹特性及不同的细菌浓度对中性粒细胞粘弹性的影响。同时以标准线性固体模型对实验数据进行了拟合。结果表明:中性粒细胞免疫激活后的粘弹性参数 K_1、K_2、μ 与对照组比较均显著增高,但随着细菌浓度的提高而表现出饱和效应;用金黄色葡萄球菌分泌物(培养液)处理中性粒细胞后,其粘弹性参数与对照组比较没有显著差异。

关键词:金黄色葡萄球菌;中性粒细胞;粘弹性;微管吸吮技术