文章编号:1000 - 582X(2002)07 - 0020 - 03

串联系统可靠性模糊优化*

邱利琼, 舒俊辉
(重庆工学院, 重庆 400050)

摘　要:大多数系统或其子系统都属于串联系统,串联系统可靠性的优化分配受到很多因素的影响,本质上是一个模糊优化问题。针对这一实际情况,在分析串联系统可靠度计算方法的基础上,建立了串联系统模糊优化数学模型,讨论了该模型的求解方法,提出了串联系统可靠度的模糊优化分配,给定各种资源数量约束条件下的串联系统可靠性优化分配。在系统可靠性优化分配中,当考虑资源限制的模糊性时,为决策者提供了更多决策信息和更灵活的决策余地。

关键词:串联系统; 可靠性分配; 模糊优化
中图分类号:O159　　**文献标识码**:A

大多数系统或其子系统都属于串联系统,这种系统只有当其组成单元全部处于正常状态时,系统才正常,否则系统失效。

所谓串联系统的可靠性优化分配,是指在尺寸、重量、造价等的限制条件下,如何选取零件的可靠度使串联系统可靠度达到最大,或者在达到串联系统可靠度要求的条件下使尺寸、重量、造价等达到最小[1]。但是,在工程实际中,往往给出的约束条件并不十非常严格,不时还要根据实际情况在设计中加以调整。此外,即使是可用资源或系统可靠度有严格的限制,也由于所用资源与系统可靠度之间没有精确的函数关系,在进行可靠性优化分配时追求严格地满足约束条件也没有多大实际意义。因此,可靠性优化分配本质上是一个模糊优化问题。针对这种实际情况,提出了串联系统可靠度的模糊优化分配方法,并以给定各种资源数量约束条件下的串联系统可靠度优化分配为例加以讨论。

1　串联系统的可靠度计算

如果在构成一个系统的 n 个元件中,只有一个元件失效该系统就失效,那么这个系统就称为串联系统。其逻辑图见图 1。

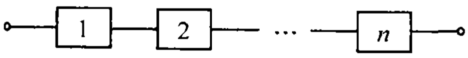

图 1　串联系统逻辑图

例如齿轮减速器是由齿轮、轴、键、轴承、箱体等组成,从功能关系上看,它们中任何一部分失效都会造成减速器不能正常工作。因此,它们的逻辑图是串联的。又比如,起重机的提升机构是由电动机、联轴器、制动器、减速器、卷筒、钢丝绳、滑轮组、吊钩装置等部件组成的,它们中任何一部分失效都会使提升机构不能工作。因此,它们的逻辑图也是串联的。

设各元件的可靠度分别为 R_1、R_2……、R_n,如果各元件的失效是相互独立的,则由这 n 个元件组成的串联系统的可靠度 R_S 可以根据概率乘法定理按下式计算:

$$R_S(t) = R_1(t)R_2(t)\cdots R_n(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \quad (1)$$

或写成
$$R_s = R_1 R_2 \cdots R_n = \prod_{i=1}^{n} R_i \quad (2)$$

串联系统的可靠度 R_S 与串联元件的数量 n 及各元件的可靠度 R_i 有关。因为各个元件的可靠度 R_i 均小于 1,所以串联系统的可靠度比系统中最大不可靠元件的可靠度还低,并且随着元件可靠度的减小和元件数量的增加,串联系统的可靠度迅速降低。所以为确保系统的可靠度不至于太低,应尽量减少串联元件的个数或采取其它措施。

2　数学模型及其求解

当考虑各种资源限制的模糊性时,串联系统可靠

* 收稿日期:2002 - 01 - 08
作者简介:邱利琼(1963 -),女,重庆人,重庆工学院讲师。主要从事应用数学方面的教学、科研工作。

度优化分配的数学模型为

$$\left.\begin{array}{l}\text{求 } R = (R_1, R_2, \cdots, R_N)^T \\ \underset{\sim}{\min} f(R) \\ s.t.\ g_i(R) \underset{\sim}{\subset} \underset{\sim}{G_i}\ (i = 1,2\cdots,m)\end{array}\right\} \tag{3}$$

式中 $f(R)$—— 目标函数；g_i —— 系统所需花费的第 i 种资源数量；$\underset{\sim}{G_i}$——第 i 种资源可用量的模糊允许区间，其隶属函数大体上具有图 2 所示的形式。

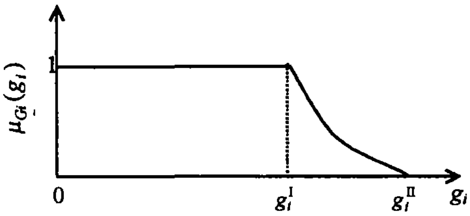

图 2　资源用量的模糊允许区间

当 $g_i \leqslant g_i^1$ 时，约束得到完全满足；当 $g_i \geqslant g_i^u$ 时，约束完全不满足；当 $g_i^1 < g_i < g_i^u$ 时，约束得到部分程度满足。$\mu_{\underset{\sim}{G_i}}(g_i)$ 的表达式为

$$\mu_{\underset{\sim}{G_i}}(g_i) = \begin{cases} 1, g_i \leqslant g_i^1 \\ h(g_i), g_i^1 < g_i < g_i^u \\ 0, g_i \geqslant g_i^u \end{cases} \tag{4}$$

式中　$h(g_i)$—— 取值在[0, 1] 区间的单调递减函数且有 $h(g_i^1) = 1, h(g_i^u) = 0$；$g_i^l, g_i^u, h(g_i)$—— 均由决策者根据实际需要决定。

式(3) 为具有普通模糊约束的模糊规划问题，可用水平截集法[2] 求解。

在式(3) 中，将约束函数 $g_i(R)$ 的模糊允许范围 $\underset{\sim}{G_i}$ 用它的 λ 水平截集来代替，则式(3) 为

$$\begin{array}{l}\text{求 } R = (R_1, R_2, \cdots, R_N)^T \\ \min f(R) \\ s.t.\ g_i(R) \in G_{i\lambda}\ (i = 1,2\cdots,m)\end{array} \tag{5}$$

式中，$G_{i\lambda} = \{g_i \mid g_i \in [0, \infty], \mu_{\underset{\sim}{G_i}}(g) \geqslant \lambda\}$

另外，还可以推出与式(5) 等价的两种形式。将隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{G_i}}(g_i)$ 称为 g_i 对其模糊约束的满足度，记为 β_i，即

$$\beta_i = \mu_{\underset{\sim}{G_i}}(g_i)(i = 1,2,\cdots,m) \tag{6}$$

这样，式(3) 中第 i 个模糊约束就表示在 $\beta_i > 0$, g_i 属于模糊子集 $\underset{\sim}{G_i}$。

根据扩展原理[3]，模糊子集 $\underset{\sim}{G_i}$ 在决策空间映射出模糊子集 $\underset{\sim}{\Omega_i}$，使

$$\mu_{\underset{\sim}{\Omega_i}}(R) = \mu_{\underset{\sim}{G_i}}(g) = \beta_i(t) \tag{7}$$

各模糊子集 $\underset{\sim}{\Omega_i}(i = 1, 2, \cdots, m)$ 的交构成模糊子集 $\underset{\sim}{\Omega}$，即

$$\underset{\sim}{\Omega} = \bigcap_{i=1}^{m} \underset{\sim}{\Omega_i} \tag{8}$$

称模糊子集 Ω 为模糊满足域，称任一决策向量 R 对 $\underset{\sim}{\Omega}$ 的隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(R)$ 为综合满足度，记为 β，则有

$$\begin{aligned}\beta(R) &= \mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(R) = T(\mu_{\underset{\sim}{\Omega 1}}(R), \mu_{\underset{\sim}{\Omega 2}}(R), \cdots, \mu_{\underset{\sim}{\Omega m}}(R)) = \\ &T(\mu_{\underset{\sim}{G_1}}(g_1), \mu_{\underset{\sim}{G2}}(g_2), \cdots, \mu_{\underset{\sim}{Gm}}(g_n)) = \\ &T(\beta_1(R), \beta_2(R), \cdots, \beta_m(R))\end{aligned} \tag{9}$$

式中，T 表示进行 T 模运算。

在式(9) 中，对 T 模运算取不同的算子会导致不同的结果，这是一个令人头痛的问题，在这里暂采用 Zadeh 算子中的"∧"即 min 作为模糊子集交运算，即

$$\begin{aligned}\beta(R) &= \mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(R) = \min_{1\leqslant i\leqslant m} \mu \underset{\sim}{\Omega_i}(R) = \\ &\min_{1\leqslant i\leqslant m} \mu \underset{\sim}{G_i}(g_i) = \min_{1\leqslant i\leqslant m} \beta_i(R)\end{aligned} \tag{10}$$

这样，可以给出式(5) 的两种等价形式为

$$\left.\begin{array}{l}\text{求 } R = (R_1, R_2, \cdots, R_n)^T \\ \min f(R) \\ s.t.\ \beta(R) \in \lambda\ (i = 1,2\cdots,m)\end{array}\right\} \tag{11}$$

和

$$\left.\begin{array}{l}\text{求 } R = (R_1, R_2, \cdots, R_n)^T \\ \min f(R) \\ s.t.\ \beta(R) \geqslant \lambda\end{array}\right\} \tag{12}$$

式(5)、式(11) 和式(12) 为 3 个等价的普通数学规划问题，分别令 $\lambda = \lambda_1 \lambda_2, \cdots$，则可求出一系列经优化解 $R^*(\lambda)$，这就为决策者提供了进一步优选的可能。通过进一步优选，可以确定出最适当的 λ 值，记为 λ^* 值，则与之相对应的 $R^*(\lambda^*)$ 即为系统可靠度优化分配的结果[4-6]。

3　算 例

设某系统由 5 个单元串联组成，它们的造价与可靠度之间的函数关系可近似表示为

$$c_j(R_j) = a_j \ln\left(\frac{1}{1 - R_j}\right) + b_j (j = 1,2,3,4,5)$$

式中，$a_1 = 24, a_2 = 8, a_3 = 8.75, a_4 = 7.14, a_5 = 3.33, b_1 = 120, b_2 = 80, b_3 = 70, b_4 = 50, b_5 = 30$，造价的单位为万元。若实际情况要求最大允许投资最好在 450 万元左右，最高不超过 600 万元，试在此情况下对此系统进行可靠度优化分配，使系统的总可靠度最大。

解：将最大允许投资限制看作是个模糊子集，依题意，其隶属函数可以图 3 所示的形式。

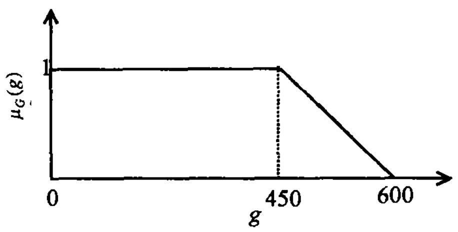

图 3 隶属函数

$\mu_G(g)$ 的表达式为：

$$\mu_G(g) = \begin{cases} 1, & g \leq 450 \\ (600 - g)/150, & 450 < g < 600 \\ 0, & g \geq 600 \end{cases}$$

根据题意，构造如下的数学规划：

$$\left.\begin{aligned} &\text{求 } R = (R_1, R_2, \cdots, R_n)^T \\ &\underset{\sim}{\max} R_s = \prod_{j=1}^{N} R_j \\ &s.t.\, g(R) = \sum_{j=1}^{s} \left[a_j \ln\left(\frac{1}{1 - R_j}\right) + b_j \right] \underset{\sim}{\subset} \underset{\sim}{G} \end{aligned}\right\}$$

然后采用水平截集法求解，对一系列 λ 值的有关结果见表 1。

表 1 计算结果

λ	R_1^*	R_2^*	R_3^*	R_4^*	R_5^*	R_6^*	系统造价	造价增加	R_S 增加
1.0	0.756	0.903	0.894	0.912	0.957	0.532	450		
0.9	0.813	0.929	0.923	0.936	0.969	0.632	465	15	0.1
0.8	0.858	0.948	0.943	0.953	0.978	0.714	480	15	0.082
0.7	0.892	0.961	0.958	0.965	0.984	0.780	495	15	0.066
0.6	0.919	0.971	0.969	0.974	0.988	0.832	510	15	0.052
0.5	0.939	0.979	0.977	0.981	0.991	0.973	525	15	0.041
0.4	0.954	0.984	0.983	0.986	0.993	0.904	540	15	0.031
0.3	0.966	0.988	0.987	0.990	0.995	0.928	555	15	0.024
0.2	0.974	0.991	0.991	0.992	0.996	0.946	570	15	0.018
0.1	0.981	0.994	0.993	0.994	0.997	0.959	585	15	0.013
0	0.986	0.995	0.995	0.996	0.998	0.970	600	15	0.011

由表 1 可以看出，λ 取值在 1.0 ~ 0.5 区间内，取系统造价在 450 ~ 525 万元范围内时，随着系统造价的增加，可靠度增加较快，也就是说在这个区间内相对来讲提高可靠度比较容易，因此在这一范围内应尽量考虑增加投资。决策者要权衡资金情况和系统可靠度的需要，选取一个比较适合的系统造价，例如可选取系统造价为 525 万元，即 $\lambda = 0.3$。

4 结束语

在系统可靠度优化分配中，当考虑资源限制的模糊性时，能给决策者提供更多决策信息和更灵活的决策余地，这就使系统可靠度优化分配问题得到了一定程度的"软化"。

参考文献：

[1] 黄洪钟. 机械传动可靠性理论与应用[M]. 北京：中国科学技术出版社，1995.

[2] WANG G Y, WANG W Q. Fuzzy optimum design of structres [J]. Engineering Optimization, 1985, 8(4): 291 - 300.

[3] ZADEH L A. The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning - I [J]. Information Science, 1975, 8: 199 - 249.

[4] 白广忱. 以可靠度为控制参数的机械系统全局优化[博士学位论文]. 哈尔滨：哈尔滨建筑工程学院，1993.

[5] 席少霖，赵风治. 最优化计算方法[M]. 上海：上海科学技术出版社，1983.

[6] 黄洪钟. 机械模糊可靠性研究[博士后出站报告]. 重庆：重庆大学，2001.

Fuzzy Optimization for Reliability Apportionment of Series system

QIU Li-qiong, SHU Jun-hui

(Engineering Institute of Chongqing)

Abstract: This paper points out that there are many factors which affect the reliability optimization apportionment of the series system which is in nature a problem of fuzzy optimization. In the light of this paper puts foreword a method for the reliability apportionment of the series system. Moreover, it is discussed with fuzzy optimization apportionment of the system reliability under the conditions of given source constraints.

Key words: series system; reliability apportionment; fuzzy optimization

(责任编辑 刘道芬)