**文章编号**:1000 - 582X(2002)09 - 0055 - 04

# CT 三代扫描旋转中心偏离的卷积反投影算法*

蔡玉芳,王　珏,杨德鸿
(重庆大学 ICT 研究中心,重庆 400044)

**摘　要**:讨论了卷积反投影算法实现 CT 图像重建时,被测工件旋转中心偏离理想重建中心的工程问题。基于理想卷积反投影重建算法理论,推导出相应校正偏离的卷积反投影算法,并引入单象素工件模型估计偏离参数;根据偏离幅度给出了理想重建算法适应的范围,仿真结果证明了校正算法的有效,利用校正算法消除了由旋转中心偏离造成的伪影,提高了图像分辨率。

**关键词**:三代扫描; 辐射源中心; 旋转中心; 卷积反投影; Radon 逆变换
**中图分类号**:TP391　　　　**文献标识码**:A

卷积反投影算法是 Radon 逆变换最常用的一种数值计算方法,在 CT 技术中得到广泛的应用,这是因为该算法兼顾了重建时间和重建质量两个 CT 性能指标。在 CT 五代扫描方式中,三代扫描方式,即辐射源扇角(简称扇角)全包容工件的扫描方式,是商业 CT 广泛采用的扫描方式,按照探测分布情况又分为两种形式:一是探测器等距分布扫描形式,二是探测器等扇角分布形式,这里只讨论与后者有关的工程问题。

对于扇角全包容工件以及工件旋转的 CT 扫描方式,图像重建卷积反投影算法有一个关于几何方面的假设:被检工件旋转中心与辐射源中心二者必须在重建中心线上。而在实际机械设计中此假设不能完全满足,必然影响 CT 图像的质量,因此必须加以校正。在导入解决方法前先分析上述假设不能满足的几种情况。

假设不能满足的情况有:1)旋转中心偏离理想重建中心线;2)辐射源中心与扇束中心不重合;3)两者同时存在。这里讨论情况 1)的校正算法,2)、3)情况比较复杂以后再作研究。

以工件旋转、奇数个探测器沿圆弧等角分布、扇角全包容工件的扫描方式获取数据进行图像重建,做了三方面的工作:1)推导相应卷积反投影算法;2)偏离参数估计;3)仿真结果分析与结论。

## 1　校正算法推导

### 1.1　基础理论

为了便于问题的描述,首先给出三代扫描标准几何结构图,如图 1 所示。

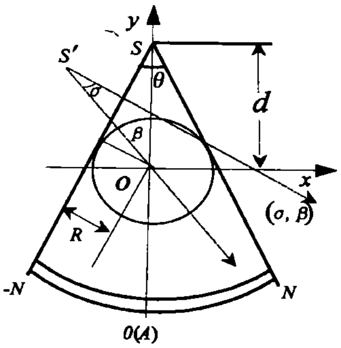



**图 1　三代扫描标准几何结构**

在图 1 中,点 $O$ 既为重建区域中心又为旋转中心,$S$ 为辐射源中心与扇束中心,$AS$ 为重建中心线,重建区域半径为 $R$,辐射源中心 $S$ 到重建中心 $O$ 的距离为 $d$,扇角为 $\theta$。假定函数 $f(r,\phi)$ 表示重建灰度值,$g(\sigma,\beta)$ 表示 $f$ 沿射线 $(\sigma,\beta)$ 的线积分,即 $f$ 沿射线 $(\sigma,\beta)$ 的雷当变换,实际中为沿射线 $(\sigma,\beta)$ 投影值,则根据 Radon 定理有

$$f(r,\phi) = \lim_{A\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\sigma_m}^{\sigma_m}\rho_A(\sigma'-\sigma)G(\sigma,\beta,\sigma')\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\beta \tag{1}$$

$$G(\sigma,\beta,\sigma') = \begin{cases}\dfrac{(\sigma'-\sigma)}{\sin(\sigma'-\sigma)}\left[\dfrac{1}{W}g_1(\sigma,\beta) - \dfrac{1}{W}g_2(\sigma,\beta)\right], 如果\ |\sigma| \leqslant \delta \\ 0, 如果\ |\sigma| > \delta\end{cases} \tag{2}$$

* 收稿日期:2002 - 06 - 11
作者简介:蔡玉芳(1974 - ),女,甘肃会宁人,重庆大学硕士。主要研究方向为模式识别与图像处理。

其中，$\rho_A$ 为正则化函数且可微[1]，$A$ 为卷积窗函数的截止频率，这里的 $g_1(\sigma,\beta)$，$g_2(\sigma,\beta)$ 分别为 $g(\sigma,\beta)$ 关于 $\sigma$、$\beta$ 的偏导数，在已经选择了一个特定的函数 $\rho_A$ 作为正则化函数以后，根据 $\rho_A$ 的可微特性，将 $G(\sigma,\beta,\sigma')$ 的值代入式(2)，利用分步积分法可得

$$f(r,\phi) = \frac{d}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{W^2}\int_{-\sigma}^{\sigma}[q^{(1)}(\sigma'-\sigma)\cos\sigma + q^{(2)}(\sigma'-\sigma)\cos\sigma']g(\sigma,\beta)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\beta \tag{3}$$

其中

$$q^{(1)}(u) = -u\rho_A(u)/\sin^2(u)$$

$$q^{(2)}(u) = (\rho_A(u) + u\rho'_A(u))/\sin(u)$$

式(3) 给出了满足理想假设的扇束几何结构的卷积反投影重建公式。

类似于平行束卷积反投影法，式(3) 的数值计算也分两步实现。

首先，对于 $\sigma'$ 值(它是相邻探测器间夹角 $\lambda$ 的整数倍，$\lambda = \theta/2N$) 用黎曼和逼近式(3) 的内层积分，我们得到

$$g_c(n'\lambda,m\Delta) = \lambda\sum_{n=-N}^{N}\cos(g(n\lambda,m\Delta)q^{(1)}((n'-n)\lambda) + \lambda\cos(n'\lambda)\sum_{n=-N}^{N}g(n\lambda,m\Delta)q^{(2)}((n'-n)\lambda) \tag{4}$$

其次，式(3) 的外层积分也用黎曼和逼近式来计算，于是有

$$f^*(r,\phi) = \frac{d\Delta}{4\pi^2}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{1}{W^2}g_c(\sigma,m\Delta) \tag{5}$$

因为 $\sigma$ 不一定为采样角度间隔 $\lambda$ 的整数倍，所以 $g_c(\sigma,m\Delta)$ 应经 $g_c(n'\lambda,m\Delta)$ 一定的内插方法得到。$\Delta$ 是每分度旋转的角度，$\sigma$ 和 $W$ 的几何意义是当光源在分度 $m$ 时，通过$(r,\phi)$ 的射线是$(\sigma,\beta)(\beta = m\Delta)$，光源与$(r,\phi)$之间的距离为 $W$，即

$$\sigma = \tan^{-1}\frac{r\cos(\beta-\phi)}{d + r\sin(\beta-\phi)},\ -\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2} \tag{6}$$

$$W = \sqrt{(x\cos\beta + y\sin\beta)^2 + (d + x\sin\beta - y\cos\beta)^2},\quad W > 0 \tag{7}$$

式(4)、式(5) 为扇束卷积反投影法软件实现公式。

### 1.2 旋转中心偏离的卷积反投影重建公式

式(4)、式(5) 给出了基于理想假设的扇束卷积反投影重建公式，下面讨论旋转中心偏离重建中心线的重建公式，对应扫描几何结构如图 2 所示。

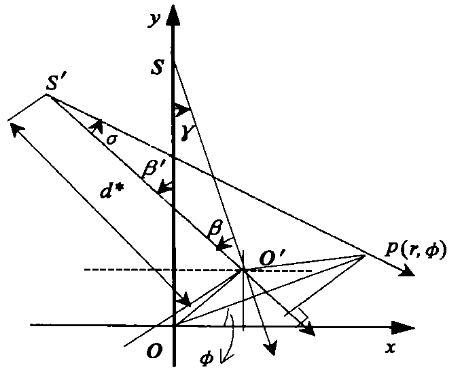



图 2 旋转中心偏离扫描几何结构

不失一般性假设旋转中心为 $O'(r_0,\phi_0)$，则辐射源中心到旋转中心 $O'(r_0,\phi_0)$ 距离为 $d^*$，旋转中心线与重建中心线的夹角为 $\gamma$，则有下式成立

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{r_0\cos\phi_0}{d - r_0\sin\phi_0}\right) \tag{8}$$

$$d^* = \sqrt{(d - r_0\sin\phi_0)^2 + r_0^2\cos\phi_0} \tag{9}$$

设点 $p(r,\phi)$ 为重建区域内任意一点，注意到此时的旋转中心线不再是重建中心线 $SO$ 而是经过点 $O'$ 的射线 $SO'$，当旋转到 $m$ 分度时，即辐射源中心在图 2 所示点 $S'$，此时 $\beta = m\lambda$，则有如下关系成立

$$\beta' = \beta + \gamma \tag{10}$$

$$\sigma' = \tan^{-1}\left(\frac{(x-x_0)\cos(\beta+\gamma) + (y-y_0)\sin(\beta+\gamma)}{d^* + (x-x_0)\sin(\beta+\gamma) - (y-y_0)\cos(\beta+\gamma)}\right) + \gamma \tag{11}$$

$$w' = s'p \tag{12}$$

其中 $x_0 = r_0\cos\phi_0, y_0 = r_0\sin\phi_0, y = r\sin\phi, x = r\cos\phi$，$\sigma'$ 为经过点$(r,\phi)$ 的射线与射线 $SO'$ 的夹角，将式(4) ~ 式(7) 中的 $\beta$、$\sigma$、$W$ 用式(10) ~ 式(12) 的 $\beta'$、$\sigma'$、$w'$ 替换则得到旋转中心偏离重建中心线的扇束卷积反投影重建计算机实现表达式。

## 2 参数估计

为求解参数 $r_0$、$\phi_0$，以一枚钢针作为单象素工件模型，扫描工件函数为 $f(r,\phi)$，且满足

$$f(r,\phi) = \begin{cases} g_c, r = c, \phi = 0; \\ 0, \text{其它} \end{cases} \quad |r| \leqslant R \tag{13}$$

此时，CT 扫描几何结构图如图 3 所示。

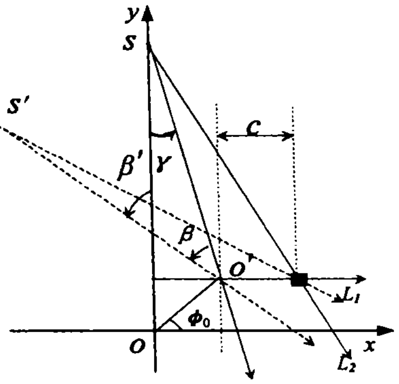



图 3　单象素模型扫描几何结构

根据 CT 成像原理，以 $O'(r_0,\phi_0)$ 为旋转中心扫描时，至少有两条射线 $(n_1\lambda,\beta_1)$、$(n_2\lambda,\beta_2)$ 经过单象素，如图 3 所示射线 $L_1$ 与射线 $L_2$。

为了方便推导，不妨令 $\beta=\pi/2-\gamma$ 与 $\beta=2\pi-\gamma$（当然实际中 $\beta$ 角度并不这样特殊），找出对应分度计数为 $g_c$ 的探测器 $n_1$、$n_2$，此时 $n_1\lambda$、$n_2\lambda$ 满足

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}\leqslant n_1\lambda、n_2\lambda\leqslant\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2} \tag{14}$$

根据式(10) 通过单象素的射线与重建中心线的夹角分别对应，则有下面关系成立

$$n_1\lambda=\tan^{-1}\left(\frac{(y-y_0)}{d^*+x-x_0}\right)+\gamma \tag{15}$$

$$n_2\lambda=\tan^{-1}\left(\frac{(x-x_0)}{d^*-(y-y_0)}\right)+\gamma \tag{16}$$

其中，$x_0=r_0\cos\phi_0$，$y_0=r_0\sin\phi_0$，$y=y_0$，$x=x_0+c$，且 $n_1\lambda$、$n_2\lambda$ 已知，联立式(8)、式(9)、式(15)、式(16) 可以得到偏离参数 $r_0$、$\phi_0$。

## 3　软件实现

1) 对工件模型扫描，根据式(15)、式(16) 求得偏离值 $r_0$、$\phi_0$。

2) 投影数据的预处理。

a. 投影数据标准化[3]，以消除数据的奇异跳动。

b. 空气校正，尽可能消除探测器效率不一致带来的干扰。

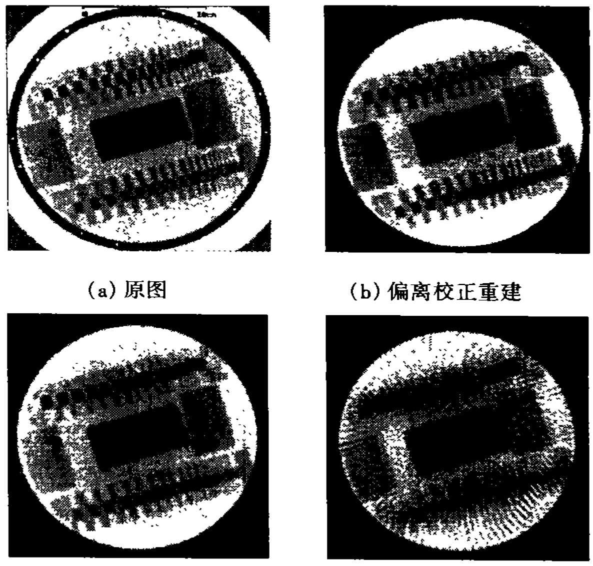
3) 选取滤波窗函数[2-3]，并与预处理后的数做卷积运算得到 $g_c(n'\lambda,m\Delta)$。

4) 选择内插方法[4]，根据式(9)、式(10) 以求得 $g_c(\sigma,m\Delta)$。

5) 根据式(5)、式(10) 将 $g_c(\sigma,m\Delta)$ 反投影得到目标函数 $f^*(r,\phi)$。

## 4　结果分析

在 CT 检测中，为了鉴别重建图像质量，通常引入一些标准测试卡，这里采用 ICT 铜卡，它重建前后结果如图 4 所示。



(a) 原图　(b) 偏离校正重建

(c) 偏离无校正重建 1　(d) 偏离无校正重建 2

图 4　原图、不同偏离参数重建结果与校正结果

图 4(c)、图 4(d) 分别是偏离参数 $(r_0,\ \phi_0)$ 为 (1.074,0)、(4.189,0) 时的重建结果，而图 4(b) 为图 4(d) 偏离情况校正重建结果，从图可以看出随着偏离参数 $r_0$ 的增加图像模糊程度越大；图 4(a)、图 4(b)、图 4(d) 同一位置灰度曲线分别如图 5 曲线 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 所示。

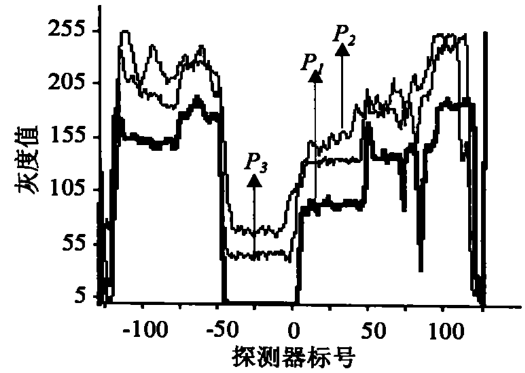



图 5　位于重建区域横轴径向各图片灰度值

原图片边界灰度变化大，因而显示在图 5 中曲线 $P_1$ 较陡峭；由旋转中心偏离直接重建图像灰度曲线渐趋平缓，如图 5 曲线 $P_2$，而且随着旋转中心偏离重建中心线的距离越大平缓程度越大，因而重建图像越模糊，如图 4(d)；图 5 中，曲线 $P_3$ 逼近曲线 $P_1$，表明针对轴心偏离的扫描现象，改进的卷积重建算法不但消除了由

旋转中心偏离重建中心引起的伪影，同时也提高了 CT 图像的分辨率，这是因为 CT 图像的分辨率不仅受滤波窗函数、内插方法以及扫描模式的影响，同时直接与辐射源到旋转中心位置相关。根据多次实验结果，目前广泛采用的滤波窗函数中，有限带窗、余弦窗和三角形窗重建图片质量最好；综合内插函数各种性能，内插过程首选线性内插，其次为 3 次 B - 样条内插。

设 $e$ 为旋转中心偏离重建中心线幅度，且定义 $e = 100 \times r_0/R$，根据实验结果，当 $e$ 值在 0 ~ 0.982 之间时，旋转中心的偏离对图像质量影响不大，图像依旧清晰。也就是说，重建半径为 128 个象素单位，偏离重建中心线的值在 1.571 个象素单位以内时，可用标准算法直接重建，不必用工件模型检测是否有偏离。

关于参数 $r_0$、$\phi_0$ 的求解采用单象素模型，而没有根据某一点的投影正弦图，再利用级数展开或最小二乘法来逼近参数[5-6]，这是因为不管利用级数展开还是最小二乘法都将大大增加计算量，从而降低了重建速度。上述单象素模型既可以一定程度消除伪影又保证较快的重建速度，对 CT 技术的推广运用有重要的现实意义。

## 5 结束语

考虑到工程实际中的机械误差，推导出旋转中心偏离的卷积反投影重建算法，实验结果证明该校正算法的可行性，校正后图片基本消除由旋转轴心偏离重建中心线所引入的伪影，CT 图像质量得以提高，关于此类伪影更好的校正方法有待进一步的研究。

**参考文献：**

[1] 赫尔曼 G T 著．由投影重建图像 - CT 的理论基础[M]．严洪范译，李叔梁校．北京：科学出版社，1985．121 - 130.

[2] 赫尔曼 G T 著．投影法图像重建 - 实现与应用[M]．谢宗钧，刘昆，黄乐斌译．北京：国防工业出版社，1985.31 - 39.

[3] 程佩青．数字信号处理教程[M]．北京：清华大学出版社，1995．193 - 203.

[4] THOMAS LEMAN M. Survey: Interpolation Methods in Medical Image Processing[J]. IEEE Trans on Med Imaging, 1999, 18 (11): 1 049 - 1 075.

[5] GULLBERG GRANT T. Reconstruction Algorithm for Fan Beam with a Displaced Center of Rotation[J]. IEEE Transaction on Medical Imaging, 1986, 5(1): 23 - 29.

[6] JOSEPH A C. CT Fan Beam Reconstruction with a No stationary Axis of Rotation[J]. IEEE Transaction on Medical Imaging, 1992, 11(1): 111 - 116.

# Convolution Back - projection Reconstruction for Ⅲ CT Scanning with a Shift Center of Rotation

*CAI Yu-fang, WANG Jue, YANG De-hong*

(Automation institute of Chongqing university, Chongqing 400044, China)

**Abstract**: The problem of displacement of center of rotation is discussed in CT image reconstruction by convolution back projection. Basing on ideal convolution back projection, a convolution back-projection with a shift center of rotation has been derived for correcting images that acquired with a divergence center of rotation using the fan beam geometry with an angle-equaled detector. In order to solve parameter of divergence axis of rotation, a single pixel phantom has been introduced. Software simulations are performed to certify correcting method's feasibility, as a result, eliminate the tail-off artifacts and improve the resolution of CT image.

**Key words**: the third scanning method; center-line of reconstruction; center of radiation Center of rotation; convolution back-projection, radon transformation

（责任编辑 张 苹）