文章编号:1000-582X(2002)09-0063-03

弹性平面问题求特解的方法及应用*

邱利琼
(重庆工学院,重庆 400050)

摘　要:现有的文献大多是讨论齐次问题或者是非齐次问题的某些特殊情形,如何将非齐次问题转化为齐次问题,通常需要寻求问题的特解,因而讨论弹性平面问题特解的方法具有实际意义。对弹性平面问题分别用位移法和应力函数给出了求位移特解和应力特解的方法,从而可将非齐次问题转化为齐次问题来处理,并给出了若干具体特解及应用。

关键词:弹性平面问题;位移;应力函数
中图分类号:O175.1　　**文献标识码**:A

对于弹性平面问题,若考虑温度或体积力等因素的影响时,其往往是非齐次的。现有的研究成果大多讨论的是齐次问题或者是非齐次问题的某些特殊情形[1-4]。如何将非齐次问题转化为齐次问题,通常需要寻求问题的特解。笔者分别从位移法和应力函数法给出了求位移特解和应力特解的一般方法,从而可将非齐次问题转化为齐次问题来处理。文中还给出了一些具体特解及应用。

已知,弹性平面问题的基本方程为[1-2]:

$$\sigma_{ij}(x)+f_i(x)=0\quad(i=1,2),x\in\Omega \tag{1}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{ij}+u_{ji})\quad(i,j=1,2) \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}=2Ge_{ij}+\frac{2Gv}{1-v}\delta_{ij}e_{kk}-\beta T\delta_{ij},(i,j,k=1,2) \tag{3}$$

其中 σ_{ij}, $e_{ij}(i,j=1,2)$ 分别为应力和应变;v 为 Poisson 系数;E 为弹性模量;α 为热胀系数;T 为温度函数;u 为位移函数;f 为体积力函数

其中 $G=\dfrac{E}{2(1+v)}$, $\beta=\dfrac{\alpha E}{1-v}$

利用式(2)、式(3),式(1)可化为位移方程[1-2]

$$\lambda u_{ki}+G(u_{ji}+u_{ji})+\beta T_j+f_i=0 \tag{4}$$

式中 $\lambda=\dfrac{2Gv}{1-v}$

引入 Airy 应力函数 ϕ,有

$$\Delta^2\phi=-E\kappa\Delta T-\pi f_{ii}\quad(i=1,2) \tag{5}$$

$$\sigma_{ij}=(-1)^{i+j}\phi_{ij}\quad(i,j=1,2) \tag{6}$$

式中对于平面应变问题 $\kappa=\dfrac{\alpha}{1-v}$, $\pi=\dfrac{1}{1-v}$;对于平面应力问题 $k=\alpha$, $\pi=(1+v)$。以上各式中 f_{ii}、$\sigma_{ij}(i=1,2)$ 分别表示对 x_1 和 x_2 的偏导数(下同)。

1　位移和应力特解

1) 热弹性问题

令位移特解 $u'_1=\Psi_{,1}$, $u'_2=\Psi_{,2}$,其中 Ψ 为位移函数。由式(4),有[1]

$$\Delta\Psi=(1+v)\alpha T \tag{7}$$

作变换

$$\xi=x_1+ix_2,\eta=x_1-ix_2 \tag{8}$$

式(7)化为

$$\Psi_{\xi\eta}=\frac{1}{4}(1+v)\alpha T(\xi,\eta)$$

于是

$$\Psi(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\iint(1+v)\alpha T(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{9}$$

代回变量 x_1, x_2,即可求得 Ψ 及位移特解。又由式(4)可求得应力特解为

$$\sigma'_{ij}=(-1)^{i+j-1}\frac{E}{1+v}\Psi_{ij}\quad(i,j=1,2) \tag{10}$$

式(9)实际上是对变量 ξ、η 的二次积分,表1列出了几种情形的位移和应力特解。

* 收稿日期:2002-05-10
作者简介:邱利琼(1963-),女,重庆人,重庆工学院讲师。主要从事应用数学方面的教学和科研工作。

表 1　几种情形的位移和应力特解

情形		T		
		C（常数）	r	r^2
位移	u_1	$\frac{1}{2}(1+v)\subset x_1$	$\frac{1}{3}(1+v)\alpha x_1 r$	$\frac{1}{4}(1+v)\alpha x_1 r^2$
	u_2	$\frac{1}{2}(1+v)\subset x_2$	$\frac{1}{3}(1+v)\alpha x_2 r$	$\frac{1}{4}(1+v)\alpha x_2 r^2$
应力	σ_{11}	$-\frac{1}{2}\propto EC$	$-\frac{1}{3}\alpha E\frac{Zx_1^2+x_2^2}{r}$	$-\frac{1}{4}\alpha E(3x_1^2+x_2^2)$
	σ_{22}	$-\frac{1}{2}\propto EC$	$-\frac{1}{3}\alpha E\frac{Zx_1^2+x_2^2}{r}$	$-\frac{1}{4}\alpha E(3x_2^2+x_1^2)$
	σ_{12}	0	$-\frac{1}{3}\alpha E\frac{x_1x_2}{r}$	$-\frac{1}{2}\alpha Ex_1x_2$

2) 对应力函数法

特解 ϕ^* 应满足平衡方程及相容方程。若不计体积力，则式(5)为 $\Delta^2\phi=-E\kappa\Delta T$，可按上述方法求得位移特解 u'，这时可化为齐次方程 $\Delta^2\phi=0$ 求解。

直接从方程(1)求应力特解。令

$$\sigma'_{11}=g_1-\int f_1\mathrm{d}x_1=g_1+f_1^*,$$

$$\sigma'_{22}=g_2-\int f_2\mathrm{d}x_2=g_2+f_2^* \tag{11}$$

代入式(1)，有

$$g_{11}+\sigma'_{12}=0,g_{22}+\sigma'_{12}=0 \tag{12}$$

又令

$$\sigma'_{11}+\sigma'_{22}=T',T'=-E\kappa T-\pi b,\text{且 }Ab=f_{ii} \tag{13}$$

由前面的讨论方法，可得

$$b=-\frac{1}{4}\iint f_{ii}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=$$

$$-\frac{1}{4}\int[f_{11}+f_{12}+i(f_{21}-f_{22})\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta] \tag{14}$$

这里右端积分中的 $f_{ij}(i,j=1,2)$ 分别表示对 ξ,η 的偏导数，于是

$$g_1+g_2=T'-(f_1^*+f_2^*)=$$

$$-E\kappa T-\pi b+\int f_1\mathrm{d}x_1+\int f_2\mathrm{d}x_2=-T^* \tag{15}$$

由式(12)，有

$$\mathrm{d}\sigma'_{12}=\sigma'_{12}\mathrm{d}x_1+\sigma'_{12}\mathrm{d}x_2=-g_{22}\mathrm{d}x_1-$$

$$g_{11}\mathrm{d}x_2=(g_1+T^*)_2\mathrm{d}x_1-g_{11}\mathrm{d}x_2 \tag{16}$$

若 $g_{11}=g_{22}$，则有

$$\Delta g_1=-T_{22}^* \tag{17}$$

作式(8)所示的变换，式(17)变为

$$g_{12}=\frac{1}{4}(T_{11}^*-2T_{12}^*+T_{22}^*) \tag{18}$$

于是

$$g_1=\frac{1}{4}(\int T_1^*\mathrm{d}\eta+\int T_2^*\mathrm{d}\xi-2T^*) \tag{19}$$

又由式(15)

$$g_2=-T^*-g_1=-\frac{1}{4}(\int T_1^*\mathrm{d}\eta+\int T_2^*\mathrm{d}\xi+2T^*) \tag{20}$$

代回变量 x_1,x_2，由式(11)及(16)即可求得应力特解 $\sigma'_{11},\sigma'_{22}$

$$\sigma'_{12}=\int_{M_0}^{M}(g_1+T)_2\mathrm{d}x_1-g_{11}\mathrm{d}x_2 \tag{21}$$

由式(17)知，式(21)右端之积分只与点 M_0、M 有关而与路径无关。不难证明特解 $\sigma'_{ij}(i,j=1,2)$ 满足式(1)及相容方程 $\Delta(\sigma'_{11}+\sigma'_{12})=-E\kappa\Delta T-\pi f_{ij}$。于是问题被归结为求解齐次方程 $\Delta\phi=0$。表 2 给出了用此法求得的特解。

表 2　几种情形的特解

情形	T^*		
	C（常数）	$\sqrt{\xi\eta}$	$\xi\eta$
σ'_{11}	$BT-\frac{C}{2}$	$-\int f_1\mathrm{d}x_1-\frac{x_1^2+2x_2^2}{2r}$	$-\int f_1\mathrm{d}x_1-\frac{1}{4}(x_1^2+3x_2^2)$
σ'_{22}	$BT-\frac{C}{2}$	$-\int f_2\mathrm{d}x_2-\frac{2x_1^2+x_2^2}{3r}$	$-\int f_2\mathrm{d}x_2-\frac{1}{4}(x_2^2+3x_1^2)$
σ'_{12}	0	$\frac{x_1x_2}{3r}$	$\frac{1}{2}x_1x_2$

2　应　　用

基于上节的方法，求得特解后，即可将问题化为齐次方程的定解问题。这里我们作进一步的讨论。

考察方程：

$$\Delta u=f(x),x\in\Omega \tag{22}$$

方程(7)即为当 $f(x)=(1+\gamma)\cdot\alpha T$ 的情形。作式(8)所示的变换，令 $f(x_1,x_2)=f_1(\xi,\eta)+if_2(\xi,\eta)$，有

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(\iint f_1(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+$$

$$i\iint f_2(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta)=F_1(\xi,\eta)+iF_2(\xi,\eta) \tag{23}$$

代回原变量 x_1,x_2，并记 $F_k(\xi,\eta)=F_k^{(1)}(x_1,x_2)+iF_k^{(2)}(x_1,x_2)+iF_k^{(2)}(x_1,x_2)(k=1,2)$，于是

$$u(x_1,x_2)=F_1^{(1)}-F_2^{(2)}+i(F_1^{(2)}+F_2^{(1)}) \tag{24}$$

因此，实际上求得的是式(22)的两个特解

$$u_1=F_1^{(1)}-F_2^{(2)},u_2=F_1^{(2)}+F_2^{(1)} \tag{25}$$

考察方程：

$$\Delta^2u=f(x),x\in\Omega \tag{26}$$

式(5)即是当 $f(x) = -E\kappa\Delta T - \pi f_{ii}$ 的情形。作式(8)所示的变换,类似地可得

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{16}\iint[\iint f_1(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \bar{F}_1(\xi,\eta) + i\bar{F}_2(\xi,\eta) \quad (27)$$

式中

$$\bar{F}_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\iint F_1(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

$$\bar{F}_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\iint F_1(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (28)$$

代回原变量 x_1, x_2,有

$$\bar{F}_1(x_1,x_2) = \bar{F}_1^{(1)}(x_1,x_2) + i\bar{F}_1^{(2)}(x_1,x_2),$$

$$\bar{F}_2(x_1,x_2) = \bar{F}_2^{(1)}(x_1,x_2) + i\bar{F}_2^{(2)}(x_1,x_2)$$

同理可得特解为

$$u_1(x_1,x_2) = \bar{F}_1^{(1)} - \bar{F}_2^{(2)},$$

$$u_2(x_1,x_2) = \bar{F}_1^{(2)} + \bar{F}_2^{(1)} \quad (30)$$

由式(16),令 $p(x_1,x_2) = (g_1 + T^*)_2, \alpha(x_1,x_2) = -g_{11}$ 及 $P_2 = Q_1$,有

$$(g_1 + T^*)_{22} = -g_{11}$$

可得

$$\Delta g_1 = -T_{22}^*$$

此即是式(17)。因此式(16)的右端满足 C－R 条件,且按式(21)求得的特解 σ'_{12} 右端的积分与路径无关[5-6]。

若取 $M_o = (\xi,\eta), M = (x_1,x_2)$,则 σ'_{12} 又可按式(31)求得

$$\sigma'_{12} = \int_{\xi}^{x_1} p(x_1,\eta)\mathrm{d}x_1 + \int_{\eta}^{x_2} Q(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2 \quad (31)$$

或

$$\sigma'_{12} = \int_{\eta}^{x_2} Q(\xi,x_2)\mathrm{d}x_2 + \int_{\xi}^{x_1} P(x_1,x_2)\mathrm{d}x \quad (32)$$

其次,由上节讨论的过程易知求得的特解 $\sigma'_{ij}(i,j = 1,2)$ 满足式(1),又注意到式(13)、式(14),即知求得的应力特解满足相容方程。

参考文献:

[1] 徐芝论.弹性力学[M].北京:人民教育出版社,1982.

[2] 王龙甫.弹性理论[M].北京:科学出版社,1978.

[3] 谈骏渝.考虑体积力的弹性平面问题[J].力学与实践,1986,17(4):37－42.

[4] TAN Junyu. Boundary Element Analysis of General Elastic Plane Problem [A]. World Scientific, Proc Inter Conf Scientific Computation[C]. Beijing:1991.216－220.

[5] 陈传璋.数学分析(第二版)[M].北京:高等教育出版社,1983.

[6] 祝家麟.椭圆边值问题的边界元分析[M].北京:科学出版社,1991.

Methods of Finding Special Solution for Elastic Plane Problem

QIU Li-qiong

(Institute College of Chongqing, Chongqing, 400050)

Abstract: The transformation of even dimension to non even dimension usually need the special solution of a certain problem. This paper discusses method to find special solution of elastic plane problem is worth for practical purpose. The methods of finding special solution of displacement and stress for elastic plane problem are given for non even limens ion displacement method and stress function method respectively, and the problem are transformed into even dimension. Several concrete special solutions and applications are included.

Key words: elastic plane problem; displacement; stress

(责任编辑　张　苹)