文章编号:1000－582X(2002)09－0129－05

具有 Bernoulli 反馈的离散时间服务门限轮询系统*

鲁韦昌，孙荣恒
(重庆大学 数理学院，重庆 400040)

摘　要：本文对具有 Bernoulli 反馈服务门限非对称的轮询系统，通过 Markov 链理论和概率母函数的方法进行研究，推导出了各站轮询时刻访问间隔时间、轮询周期、每站的服务时间、每站的队长、第 i 站($i=1,2,\cdots N$)顾客 C 每次反馈的逗留时间系列及每次顾客 C 服务完成时系统的队长的概率母函数。

关键词：Bernoulli 反馈；服务门限；访问间隔时间；队长；逗留时间；轮询周期

中图分类号：O226；TH111　　**文献标识码**：A

轮询系统是一大类现实世界客观存在的轮询机构的核心部分。它在计算机通信网络及工业过程控制的领域都得到了广泛的应用。轮询系统工作过程是：系统内有一个中央服务器担任对每一个站的查询工作，查询按一定顺序进行，两个站之间的查询时间称为走步时间，接受查询的站获得服务机会，若该站无顾客，则中央服务器继续对下一个队列查询。目前，连续时间的非对称轮询系统已有些结果，但随着计算机网络的发展和自动控制领域的不断进步，提出了大量的非对称离散时间轮询系统的问题。H. Takagi. 利用概率母函数的方法，通过嵌入 Markov 链对批到达，服务时间以定长的离散时间的非对称轮询系统进行了详细研究，本文采用此方法，对具有 Bernoulli 反馈且也是 Bernoulli 到达和服务过程的离散时间非对称轮询系统进行讨论，给出系统的有关特性参数。

1　具有 Bernoulli 反馈的离散时间非对称轮询系统模型

讨论的轮询系统中有 N 个站，这 N 个站是由一个服务器以一定顺序查询，其系统模型见图 1。若查询到的站有顾客，则服务器将对该站顾客进行服务，否则将对下一个站进行查询。

1.1　假设条件

(1) 本文所讨论的是离散时间的轮询系统，因此在以下讨论中时间轴按时隙 τ 为单位划分(为简单计，取 τ 为单位时间)。顾客在(n, $n+$)中到达，顾客在($m--$, $m-$)服务完成，顾客在($m-$, m)中可能反馈，每次被服务完后以概率 σ_i 立刻反馈到该站队列尾端，以概率

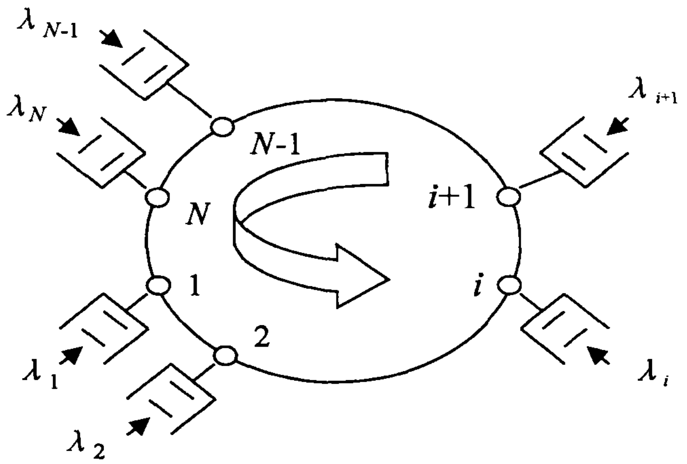

图 1　轮询系统模型

$1-\sigma_i$ 立刻离开排队系统，永不再来。即是以参数 σ_i 的 Bernoulli 反馈。(见图 2)

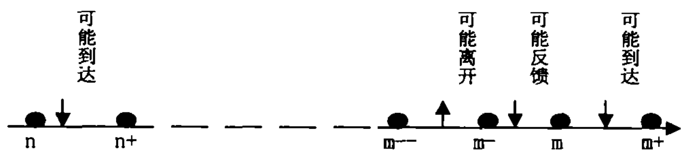

图 2　时间系

(2) 设第 i 站的顾客到达时间间隔序列 $\{J_{in}, n\geqslant 1\}$ 是相互独立且与 J_i 同分布的随机变量序列，J_i 服从参数为 λ_i 的几何分布。该站各个顾客的服务时间序列 $\{B_{in}, n\geqslant 1\}$ 也是相互独立且与 B_i 同分布随机变量序列，B_i 服从参数为 μ_i 的几何分布。

(3) R_i 表示服务器从第 i 站到第 $i+1$ 站的走步时

* 收稿日期：2002－02－13
作者简介：鲁韦昌(1963－)，女，江西人，重庆大学讲师，硕士。主要从事应用排队论研究。

间，且是取 τ 的整数倍的随机变量，服从一般分布。$R_i \geqslant 1(i=1,2,\cdots,N)$。$(i\in(\mathrm{mod}N))$ 服务器进入(离开)走步时间或进入(离开)某站都在 τ 的整数倍时刻发生。

(4) 各站输入过程，所有服务时间，对每一个顾客服务完一次是否反馈，所有走步时间均相互独立。

(5) 每个站的缓冲器容量足够大，不会产生顾客丢失。系统处于平稳条件($\rho<1$)下。

(6) 对于进入缓冲器的顾客，按先来先服务原则进行。

1.2 引入记号

$\tau_i(m)$：服务器在第 m 次轮询到 i 站的时刻。

$L_i(t)$：时刻 t 在 i 站的顾客数。

$\xi_i(t)$：在 t 个单位时间里到达 i 站的顾客数．即 $\{\xi_i(t),t\geqslant 0\}$ 为参数为 λ_i 的 Bernoulli 过程。

C_i：服务器相继两次到达 i 站的时间间隔称为相对于 i 站的轮询周期．$\tilde{C}_i=E(Z^{C_i})$。

I_i：服务器离开 i 站到再次到达 i 站的时间间隔称为相对于 i 站的访问间隔时间．$\tilde{I}_i(Z)=E(Z^{I_i})$。

T_i：服务器对 i 站的每次服务时间．$\tilde{T}_i(Z)=E(Z^{T_i})$。

θ_{ij}：第 i 站的第 j 个顾客引出的忙期。

Y_{ik}：第 i 站的一个顾客在第 $k-1$ 次服务后反馈到该站排队起到第 k 次服务完成后的这段时间。

N_{k-1}：某站顾客在第 k 次排队开始时系统中已有的顾客数。

$\tilde{R}(Z)=E[\prod_{j=1}^{N}Z^{R_j}]$，$\tilde{R}_i(Z)=E[Z^{R_i}]$，$r_i=E(R_i)$，$r=\sum_{i=1}^{N}r_i$，$\rho_i=\dfrac{\lambda_i}{\mu_i\overline{\sigma_i}}$，$\rho=\sum_{i=1}^{N}\dfrac{\lambda_i}{\mu_i\overline{\sigma_i}}$，$\overline{\sigma_i}=1-\sigma_i$，$L_j(\tau_i)=\lim_{m\to\infty}L_j(\tau_i(m))$，$F_i(Z_1,Z_2,\cdots,Z_N)=E[\prod_{j=1}^{N}Z_j^{L_j(\tau_i)}]$，$G(Z_1,Z_2,\cdots,Z_N)=E[\prod_{j=1}^{N}Z_j^{L_j(\tau_i)}]$，$\tilde{G}_j(Z)=E[Z^{L_j(\tau_i)}]$

2 主要结果

本文讨论具有 Bernoulli 反馈的服务门限的非对称轮询系统模型。Bernoulli 反馈是服务器对在 i 站的每个顾客仅服务一次，直到服务了 $L_i(\tau_i)$ 个顾客后服务器就离开 i 站，每次顾客服务完一次后以 σ_i 的概率反馈回站的队尾，以概率 $1-\sigma_i$ 离开 i 站的排队系统。

定理 1：对于 Bernoulli 反馈的服务门限的非对称轮询系统模型，有

$$F_{i+1}(Z_1,Z_2,\cdots,Z_N)=\tilde{R}_i(\prod_{j=1}^{N}(\lambda_jZ_j+\overline{\lambda_j}))F_i(Z_1,\cdots,Z_{i-1},(\sigma_iZ_i+\overline{\sigma_i})\tilde{B}_i(\prod_{j=1}^{N}\lambda_jZ_j+\overline{\lambda_j})),Z_{i+1},\cdots,Z_N) \quad (1)$$

$$\tilde{G}_i(Z)=\tilde{R}(\lambda_iZ+\overline{\lambda_i})G(\tilde{B}_1(\lambda_iZ+\overline{\lambda_i}),\cdots,\tilde{B}_{i-1}(\lambda_iZ+\overline{\lambda_i}),\tilde{B}_i(\lambda_iZ+\overline{\lambda_i})(\sigma_iZ+\overline{\sigma_i}),\tilde{B}_{i+1}(\lambda_iZ+\overline{\lambda_i}),\cdots,\tilde{B}_i(\lambda_iZ+\overline{\lambda_i})) \quad (2)$$

$$E(L_i(\tau_i))=\frac{\lambda_ir}{\overline{\sigma_i}(1-\rho)},$$

$$E(L_j(\tau_i))=\lambda_j\left(\sum_{k=j}^{i-1}r_k+\frac{r}{1-\rho}\sum_{k=j}^{i-1}\rho_k+\frac{r}{1-\rho}\cdot\frac{\underline{\sigma_j}}{\sigma_j}\right) \quad (3)$$

其中 k 从 j 到 $i-1$ 的数是属于 $\mathrm{mod}N$.

证明：对于所讨论的轮询系统，可建立如下数学模型：

$$\begin{cases}L_i(\tau_{i+1})=\xi_i(R_i)+\xi_i(\sum_{k=1}^{L_i(\tau_i)}B_{ik})+f_i(L_i(\tau_i))\\ L_j(\tau_{i+1})=\xi_j(R_i)+L_j(\tau_i)+\xi_j(\sum_{k=1}^{L_i(\tau_i)}B_{ik})\end{cases}$$
$$(i,j=1,2,\cdots,N.\ j\neq i) \quad (4)$$

其中 $B_{ik}(i=1,2,\cdots,N.\ k=1,2,\cdots,L_i(\tau_i)$ 表示第 i 站的第 k 个顾客在 i 站的一次服务时间，$f_i(L_i(\tau_i))$ 是服务器每次在第 i 站服务时反馈的顾客数。

显然 $E[\prod_{j=1}^{N}Z_j^{\xi_j(R_i)}]=\tilde{R}_i[\prod_{j=1}^{N}(\lambda_jZ_j+\overline{\lambda_j})]$，

于是 $F_{i+1}(Z_1,Z_2,\cdots,Z_N)=E(\prod_{j=1}^{N}Z_j^{L_j(\tau_{i+1})})=$

$E(\prod_{j=1}^{N}Z_j^{\xi_j(R_i)})E[(\prod_{j=1}^{N}Z_j^{\xi_j(\sum_{k=0}^{L_i(\tau_i)}B_{ik})})\cdot(\prod_{j=1}^{N}Z_j^{L_j(\tau_i)})(Z_i^{f_i(L_i(\tau_i))})]=\tilde{R}_i(\prod_{j=1}^{N}(\lambda_jZ_j+\overline{\lambda_j}))\cdot F_i(Z_1,\cdots,Z_{i-1},(\sigma_iZ_i+\overline{\sigma_i})\cdot\tilde{B}_i(\prod_{j=1}^{N}(\lambda_jZ_j+\overline{\lambda_j})),Z_{i+1},\cdots,Z_N)$

服务器第 $m+1$ 次轮询到 i 站时，i 站的顾客数 $L_i(\tau_i(m+1))$ 应是所有行走时间 $R_j(j=1,2,\cdots,N)$，服务器在各站的服务时间之和到达的顾客与服务器在第 m 次轮询到 i 站时服务完一次后反馈的顾客数之和，即

$$L_i(\tau_i(m+1))=\sum_{j=1}^{N}\xi_i(R_j)+\sum_{j=1}^{N}\xi_i(\sum_{k=1}^{L_j(\tau_j(m))}B_{jk})+f_i(L_i(\tau_i(m))) \quad (5)$$

显然 $E(\prod_{j=1}^{N}Z_j^{\xi_j(R_i)})=\tilde{R}_i[\prod_{j=1}^{N}(\lambda_jZ_j+\overline{\lambda_j})]$

$E(Z^{\sum_{j=1}^{N}\xi_i(\sum_{k=1}^{L_j(\tau_j(m))}B_{jk})+f_i(L_i(\tau_i(m)))})=$

$E(\prod_{j=1}^{N}\tilde{B}_j(\lambda_i Z+\overline{\lambda_i})^{L_j(\tau_j(m))}(\sigma_i Z+\overline{\sigma_i}^{L_i(\tau_i(m))})$

当 $m\rightarrow\infty$ 时(2)式成立.

对(5)两边取数学期望且 $m\rightarrow\infty$ 有,

$$E(L_i(\tau_i))=\lambda_i r+\lambda_i\sum_{j=1}^{N}E(L_j(\tau_j))\frac{1}{\mu_j}+\sigma_i E(L_i(\tau_i))$$

即
$$E(L_i(\tau_i))=\frac{\lambda_i r}{\overline{\sigma_i}}+\frac{\lambda_i}{\overline{\sigma_i}}\sum_{j=1}^{N}E(L_j(\tau_j))\frac{1}{\mu_j}\qquad(6)$$

上式两边乘以 $\frac{1}{\mu_i}$,在对 i 求和:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\mu_i}E(L_i(\tau_i))=\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i r}{\mu_i\overline{\sigma_i}}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{\mu_i\overline{\sigma_i}}\sum_{j=1}^{N}E(L_j(\tau_j))\frac{1}{\mu_j}$$

得到
$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\mu_i}E(L_i(\tau_i))=\frac{r\rho}{1-\rho}\qquad(7)$$

将(6)代入(7)式: $E(L_i(\tau_i))=\frac{\lambda_i r}{(1-\rho)\overline{\sigma_j}}$ $(i=1,2,\cdots,N)$

另外 $L_j(\tau_i)=\sum_{k=j}^{i-1}\xi_j(R_k)+\sum_{k=j}^{i-1}\xi_j(\sum_{l=1}^{L_k(\tau_k)}B_{kl})+f_j(L_j(\tau_j))$

其中 k 从 $j,j+1$ 直到 $i-1$ 的数是属于 $\mathrm{mod}N$

$$E(L_j(\tau_i))=\lambda_j\left(\sum_{k=j}^{i-1}r_k+\sum_{k=j}^{i-1}\frac{r\rho_k}{1-\rho}+\frac{\sigma_j\lambda_j r}{(1-\rho)\overline{\sigma_j}}\right)$$

定理2:对于具有Bernoulli反馈的服务门限的非对称轮询系统模型,有

$$\tilde{I}_i(Z)=\tilde{G}_i\left(\tilde{B}_i\left(\frac{\lambda_i^2}{Z-\overline{\lambda_i}}+\overline{\lambda_i}\right)\left(\sigma_i+\frac{Z-\overline{\lambda_i}}{\lambda_i}\overline{\sigma_i}\right)\right),$$

$$E(I_i)=\frac{(1-\rho_i)r}{1-\rho};$$

$$\tilde{T}_i(Z)=\tilde{G}_i(\tilde{B}_i(Z)),E(T_i)=\frac{r\rho_i}{1-\rho};$$

$$\tilde{C}_i(Z)=\tilde{R}(Z)G(\tilde{B}_1(Z),\cdots,\tilde{B}_N(Z)),$$

$$E(C)=\frac{r}{1-\rho}$$

证明:对于所讨论的轮询系统模型,有

$$L_i(\tau_i)=\xi_i(I_i)+\xi_i\left(\sum_{k=1}^{L_i(\tau_i)}B_{ik}\right)+f_i(L_i(\tau_i))\qquad(8)$$

一方面: $E(Z^{\xi_i(I_i)})=\tilde{I}_i(\lambda_i Z+\overline{\lambda_i})$

另一方面:

$$E(Z^{\xi_i(I_i)})=E(Z^{L_i(\tau_i)-\xi_i(\sum_{k=1}^{L_i(\tau_i)}B_{ik})-f_i(L_i(\tau_i))})=$$
$$\tilde{G}_i(\tilde{B}_i(\frac{\lambda_i}{Z}+\overline{\lambda_i})(\sigma_i+\overline{\sigma_i}Z))$$

因此

$$\tilde{I}_i(Z)=\tilde{G}_i\left(\left(\sigma_i+\overline{\sigma_i}\frac{Z-\overline{\lambda_i}}{\lambda_i}\right)\tilde{B}_i\left(\frac{\lambda_i^2}{Z-\overline{\lambda_i}}+\overline{\lambda_i}\right)\right)$$

对(8)式两端求数学期望,计算得: $E(I_i)=\frac{r(1-\rho_i)}{1-\rho}$

又 ∵ $T_i=\sum_{k=1}^{L_i(\tau_i)}B_{ik}$, ∴ $\tilde{T}_i(Z)=E(Z^{T_i}=E(Z^{\sum_{k=1}^{L_i(\tau_i)}B_{ik}})=\tilde{G}_i(\tilde{B}_i(Z))$

在平稳条件($\rho<1$),有 $L_i(\tau_i)=\xi_i(I_i)+\xi_i(T_i)+f_i(L_i(\tau_i))$

则 $E(L_i(\tau_i)=E(\xi_i(I_i))+E(\xi_i(T_i))+E(f_i(L_i(\tau_i)))=\lambda_i E(I_i)+\lambda_i E(T_i)+\sigma_i E(L_i(\tau_i))$

得到 $E(T_i)=\frac{r\rho_i}{1-\rho}$

对于服务器轮询周期:

$$C=\sum_{i=1}^{N}R_i+\sum_{i=1}^{N}T_i=\sum_{i=1}^{N}R_i+\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{L_i(\tau_i)}B_{ik}\right)$$

$$\tilde{C}(Z)=E(Z^{\sum_{i=1}^{N}R_i+\sum_{i=1}^{N}(\sum_{k=1}^{L_i(\tau_i)}B_{ik})})=$$
$$\tilde{R}(Z)G(\tilde{B}_1(Z),\cdots,\tilde{B}_1(Z),\cdots,\tilde{B}_N(Z))$$

而且 $E(C)=E(T_i)+E(I_i)=\frac{r}{1-\rho}$。故定理2全部证明完毕。

定理3:对于具有Bernoulli反馈的服务门限的非对称轮称系统模型.服务器轮询 i 站时,对每个顾客服务一次后,顾客以概率 σ_i 反馈回 i 站的队尾,以概率 $1-\sigma_i$ 离开 i 站的排队系统,此时顾客在 i 站形成一个逗留时间 Y_{ik},当服务器对 $L_i(\tau_i)$ 个顾客都服务了一次,服务器随即离开 i 站.若服务器对顾客服务了 m 次,则顾客在 i 站形成 m 个逗留时间系列 $Y_{i1},Y_{i2},\cdots,Y_{im}$。这里 $Y_{ik}=\sum_{j=1}^{N_{k-1}}B_{ikj}+B_{ik}+I_i(k=1,2,\cdots)$,其中 B_{ikj} 是顾客 C 第 k 次排入 i 站排队系统时,此排队系统已有的顾客的服务时间,B_{ik} 是顾客 C 第 k 次服务时间。

令 $\Phi_m=X$

$$\Phi_{m-1}=\overline{\sigma_i}+\sigma_i\Phi_m\tilde{B}_i(\Psi_m)$$
$$\Phi_{m-2}=\overline{\sigma_i}+\sigma_i\Phi_{m-1}\tilde{B}_i(\Psi_{m-1})$$
$$\cdots\cdots$$
$$\Phi_k=\overline{\sigma_i}+\sigma_i\Phi_{k+1}\tilde{B}_i(\Psi_{k+1})$$
$$\cdots\cdots$$
$$\Phi_1=\overline{\sigma_i}+\sigma_i\Phi_2\tilde{B}_i(\Psi_2)$$
$$\Phi_0=\overline{\sigma_i}+\sigma_i\Phi_1\tilde{B}_i(\Psi_1)$$
$$\Psi_m=Z_m$$
$$\Psi_{m-1}=Z_{m-1}(\overline{\lambda_i}+\lambda_i\Phi_m\tilde{B}_i(\Psi_m))$$

$$\Psi_{m-2} = Z_{m-2}(\overline{\lambda_i} + \lambda_i \Phi_{m-1} \tilde{B}_i(\Psi_{m-1}))$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Psi_k = Z_k(\overline{\lambda_i} + \lambda_i \Phi_{k+1} \tilde{B}_i(\Psi_{k+1}))$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Psi_1 = Z_1(\overline{\lambda_i} + \lambda_i \Phi_2 \tilde{B}_i(\Psi_2))$$

$$\Psi_0 = \overline{\lambda_i} + \lambda_i \Phi_1 \tilde{B}_i(\Psi_1) \tag{9}$$

则(1) 若顾客 C 到 i 站时，服务器已经离开 i 站，那么

$$P_{m1}(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m, X) = E(Z_1^{Y_1}, Z_2^{Y_2}, \cdots, Z_m^{Y_m}, X) = \lambda_i \tilde{B}_i(\Psi_1) \tilde{T}_i(\Psi_0(\overline{\mu_i} + \mu_i \Phi_0)) \cdot \frac{\tilde{I}_i(\Psi_1) - \tilde{I}_i(\Psi_0)}{\Psi_1 - \Psi_0} \prod_{j=2}^{m} \tilde{B}_i(\Psi_j) \tilde{I}_i(\Psi_j) \tag{10}$$

(2) 若顾客 C 到 i 站时，服务器正在 i 站服务，那么

$$P_{m2}(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N, X) = \tilde{N}_0(\tilde{B}_i(\Psi_1)\Phi_1) \prod_{j=1}^{m} \tilde{B}_i(\Psi_j) \tilde{I}_i(\Psi_j) \tag{11}$$

而 $$\tilde{N}_0(Z) = \frac{\lambda_i\left(\mu_i \frac{\sigma_i Z + \overline{\sigma_i}}{Z} + \overline{\mu_i}\right)}{1 - (\lambda_i Z + \overline{\lambda_i})\left(\mu_i \frac{\sigma_i Z + \overline{\sigma_i}}{Z} + \overline{\mu_i}\right)} (\tilde{C}(\lambda_i Z + \overline{\lambda_i}) - \tilde{C}(\lambda_i Z \tilde{u}_i((\lambda_i Z + \overline{\lambda_i})(\mu_i \frac{\sigma_i Z + \overline{\sigma_i}}{z} + \overline{\mu_i})) + \overline{\lambda_i}))$$

(3) 顾客 C 在任意时刻到达 i 站且经过 m 次反馈的逗留时间的概率母函数

$$P_m(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m, X) = \rho_i P_{m2}(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m, X) + (1 - \rho_i) P_{m1}(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m, X) \tag{12}$$

证明：$(Y_{i1}, Y_{i2}, \cdots, Y_{im}, N_{m-1})$ 的概率母函数 $P_m(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m, X) = E(Z_1^{Y_{i1}} Z_2^{Y_{i2}} \cdots Z_m^{Y_{im}} X^{N_{m-1}})$ 依赖于条件 $(N_0, N_1, \cdots, N_{m-2}, Y_{i1}, Y_{i2}, \cdots, Y_{im-1})$，而 N_{m-1} 可决定 Y_{im}，因此由 $(N_0, N_1, \cdots, N_{m-2}, Y_{i1}, \cdots, Y_{im-1}$ 可得到 (N_{m-1}, Y_{im})，由于服务器对每个顾客服务时间是相互独立的，有

$$P_m(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m, X) = E\{E(Z_1^{Y_{i1}} Z_2^{Y_{i2}} \cdots Z_{m-1}^{Y_{i(m-1)}} Z_m^{\sum_{j=1}^{N_{m-1}} B_{imj} + B_{im} + I_i} X^{N_{m-1}} \mid N_{m-2}, Y_{i(m-1)})\} = E\{Z_1^{Y_{i1}}, Z_2^{Y_{i2}}, \cdots, Z_{m-1}^{Y_{i(m-1)}}, \tilde{B}_i(Z_m) \tilde{I}_i(Z_m) \cdot E([X\tilde{B}_i(Z_m)]^{N_{m-1}} \mid N_{m-2}, Y_{i(m-1)})\}$$

由于 $N_k (k = 1, 2, \cdots)$ 是由在 Y_{ik} 时间内到达 i 站的顾客数 N_k^{λ} 有顾客 C 第 k 次逗留时间内反馈的顾客数 N_k^{σ} 之和，即有

$$E\{[X\tilde{B}_i(Z_m)]^{N_{m-1}} \mid N_{m-2}, Y_{i(m-1)}\} = E\{[X\tilde{B}_i(Z_m)]^{N_{m-1}^{\lambda} + N_{m-1}^{\sigma}} \mid N_{m-2}, Y_{i(m-1)}\} = (\overline{\lambda_i} + \lambda_i X \tilde{B}_i(Z_m))^{Y_{i(m-1)}} (\overline{\sigma_i} + \sigma_i X \tilde{B}_i(Z_m))^{N_{m-2}}$$

这样 $$P_m(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m, X) = \tilde{B}_i(Z_m) \tilde{I}_i(Z_m) \cdot E\{Z_1^{Y_{i1}} \cdots Z_{m-2}^{Y_{i(m-2)}} (Z_{m-1}(\overline{\lambda_i} + \lambda_i X \tilde{B}_i(Z_m)))^{Y_{i(m-1)}} \cdot (\overline{\sigma_i} + \sigma_i X \tilde{B}_i(Z_m))^{N_{m-2}}\}$$

又由于 $(N_0, N_1, \cdots, N_{m-3}; Y_{i1}, Y_{i2} \cdots, Y_{i(m-2)})$ 可得到 $(N_{m-2}, Y_{i(m-1)})$ 重复以上步骤 $(m-1)$ 为简单计，令一组式(9)，则有

$$P_m(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m, X) = \tilde{B}_i(Z_m) \tilde{I}_i(Z_m) \cdot E\{Z_1^{Y_{i1}}, Z_2^{Y_{i2}}, \cdots, Z_{m-2}^{Y_{i(m-2)}} \Psi_{m-1}^{Y_{i(m-1)}} \Phi_{m-1}^{N_{m-2}}\} = E\{\Psi_1^{Y_{i1}} \Phi_1^{N_0}\} \prod_{j=2}^{m} \tilde{B}_i(\Psi_j)$$

(1) 当顾客 C 到达 i 站时，服务器已经离开 i 站，此时 $Y_{i1} = I_i - t + \sum_{j=0}^{N_0} B_{i1j} + B_{i1} \quad (0 < t \leqslant I_i \quad N_0 = \xi_i(t) + \xi_i(T_i) + f(B(T_i))$

其中 t 时从服务器离开 i 站起计时，顾客 C 到达 i 站的时刻；表示在 里服务完顾客的反馈数。

这样 $E\{\Psi_1^{Y_{i1}} \Phi_1^{N_0}\} =$

$$E\{\Psi_1^{I_i} E\{\Psi_1^{B_{i1} - t + \sum_{j=0}^{\xi_i(t)} B_{i1j} + \sum_{j=0}^{\xi_i(T_i) + f(B(T_i))} B_{i1j}} \Phi_1^{\xi_i(t) + \xi_i(T_i) + f(B(T_i))} \mid I_i\}\}$$

由 $\xi_i(t)$ 与 $\xi_i(T_i) + f(B(T_i))$ 是相互独立的。

$$E\{\Psi^{\sum_{j=0}^{\xi_i(t)} B_{i1j} - t + B_{i1}} \Phi_1^{\xi_i(t)} \mid I_i\} = \lambda_i \tilde{B}_i(\Psi_1) \frac{1 - \left(\frac{\lambda_i \tilde{B}_i(\Psi_1)\Phi_1 + \overline{\lambda_i}}{\Psi_1}\right)^{I_i}}{\Psi_1 - (\lambda_i \tilde{B}_i(\Psi_1)\Phi_1 + \overline{\lambda_i})}$$

$$E(\Psi_1^{\sum_{j=0}^{\xi_i(T_i) + f(B(T_i))} B_{1j}} \Phi_1^{\xi_i(T_i) + f(B(T_i))}) = \tilde{T}_i(\Psi_0(\Phi_0 \mu_i + \overline{\mu_i}))$$

$$E\{\Psi_1^{Y_{i1}} \Phi_1^{N_0}\} = E\{\lambda_i \tilde{B}_i(\Psi_1) \tilde{T}_i(\Psi_0(\Phi_0 \mu_i + \overline{\mu_i})) \cdot \frac{\Psi_1^{I_i} - \Psi_0^{I_i}}{\Psi_1 - \Psi_0}\} = \lambda_i \tilde{B}_i(\Psi_1) \cdot \tilde{T}_i(\Psi_0(\Phi_0 \mu_i + \overline{\mu_i})) \frac{\tilde{I}_i(\Psi_1) - \tilde{I}_i(\Psi_0)}{\Psi_1 - \Psi_0}$$

故 $$P_{m1}(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m, X) = \lambda_i \tilde{B}_i(\Psi_1) \tilde{T}_i(\Psi_0(\Phi_0 \mu_i + \overline{\mu_i})) \cdot \frac{\tilde{I}_i(\Psi_1) - \tilde{I}_i(\Psi_0)}{\Psi_1 - \Psi_0} \prod_{j=2}^{m} \tilde{B}_i(\Psi_j) \tilde{I}_i(\Psi_j)$$

(2) 当顾客 C 到 i 站时，服务器正在 i 站服务，此时

$$Y_{i1} = B_{11} + \sum_{j=2}^{N_0} B_{i1j} + B_{i1} + I_i$$

$$N_0 = \xi_i(C) + \xi_i(t) + f(B(t)) - B(t)$$

$$(0 < t \leqslant \sum_{j=1}^{\xi_i(C)} B_{ij})$$

其中 t 是从顾客 C 到 i 站起计时，顾客 C 到达 i 站的时刻，$B(t)$ 是在 t 时间内服务完的顾客数，若 t 时刻恰好服务完一个顾客也将计入其内．$f(B(t))$ 是 $B(t)$ 个顾客反馈数．B_{11} 是顾客 C 首次到达 i 站时，服务器正在服务的顾客的剩余服务时间．由于 B_{11} 是服从参数 μ_i 的几何分布，且几何分布无记忆性．因此

$$E\{\Psi_1^{Y_{i1}}\Phi_1^{N_0}\} = E\{\Psi_1^{\sum_{j=1}^{N_0} Bi1j+B_{i1}+I_j} \mid N_0 > 0\}\cdot P\{N_0 > 0\} + \tilde{B}_i(\Psi_1)\tilde{I}_i(\Psi_1)P\{N_0 = 0\} = \tilde{B}_i(\Psi_1)\tilde{I}_i(\Psi_1)\tilde{N}_0(\tilde{B}_i(\Psi_1)\Phi_1)$$

而

$$\tilde{N}_0(Z) = E(Z^{N_0}) = E(Z^{\xi_i(t)+\xi_i(C)+f(B(t))-B(t)}) = E\{Z^{\xi_i(C)}E\{Z^{\xi_i(t)+f(B(t))-B(t)} \mid \xi_i(C)\}\}$$

$$E\{Z^{\xi_i(t)+f(B(t))-B(t)} \mid \xi_i(C)\} = \lambda_i\left(\frac{\sigma_i Z + \overline{\sigma_i}}{Z}\mu_i + \overline{\mu_i}\right)\cdot \frac{1 - \left[(\lambda_i Z + \overline{\lambda_i})\left(\frac{\sigma_i Z + \overline{\sigma_i}}{Z}\mu_i + \overline{\mu_i}\right)\right]^{\sum_{j=1}^{\xi_i(C)} B_{ij}}}{1 - (\lambda_i Z + \overline{\lambda_i})\left(\frac{\sigma_i Z + \overline{\sigma_i}}{Z}\mu_i + \overline{\mu_i}\right)}$$

$$\tilde{N}_0(Z) = E\left\{\lambda_i\left(\mu_i\frac{\sigma_i Z + \overline{\sigma_i}}{Z} + \overline{\mu_i}\right)Z^{\xi_i(C)}\cdot \frac{1 - \left[(\lambda_i Z + \overline{\lambda_i})\left(\frac{\sigma_i Z + \overline{\sigma_i}}{Z}\mu_i + \overline{\mu_i}\right)\right]^{\sum_{j=1}^{\xi_i(C)} B_{ij}}}{1 - (\lambda_i Z + \overline{\lambda_i})\left(\frac{\sigma_i Z + \overline{\sigma_i}}{Z}\mu_i + \overline{\mu_i}\right)}\right\} =$$

$$\frac{\lambda_i\left(\frac{\sigma_i + \overline{\sigma_i}}{Z}\mu_i + \overline{\mu_i}\right)}{1 - (\lambda_i Z + \overline{\lambda_i})\left(\frac{\sigma_i Z + \overline{\sigma_i}}{Z}\mu_i + \overline{\mu_i}\right)}\cdot$$

$$[\tilde{C}(\lambda_i Z + \overline{\lambda_i}) - \tilde{C}(\lambda_i Z\tilde{B}_i((\lambda_i Z\tilde{B}_i((\lambda_i Z + \overline{\lambda_i})\cdot (\frac{\sigma_i Z + \overline{\sigma_i}}{Z}\mu_i + \overline{\mu_i}) + \overline{\lambda_i})]$$

(3) 顾客 C 在任意时刻到达 i 站，则因为任意时刻服务器在 i 站的概率为

$$\frac{E(T_i)}{E(C)} = \frac{r\rho_i}{1-\rho}\cdot\frac{1-\rho}{r} = \rho_i$$

$$P_m(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m, X) = \rho_i P_{m2}(Z_1, \cdots, Z_m, X) + (1-\rho_i)P_{m1}(Z_1, \cdots, Z_m, X)$$

参考文献：

[1] TAKAGI H. Queueing Analysis[M]. North - Holland: Amsterdam, 1993.

[2] HUNTER J J. Mathematical Techniques of Applied Probability Vol.2[M]. New York: Acdemic press, 1983.

[3] SUN RONGHENG. Asymmetric Exhaustive Service Polling Systems with Bernoulli Feedback [C]. Conference Record International Workshop on Markov Processes & Controlled Markov Chains, 1999.

[4] 孙荣恒．具有 Bernoulli 反馈的门限服务与 1－有限服务轮询系统的队长[J]．重庆大学学报(自然科学版)，1998，21(6)：

[5] 孙荣恒，孙宇．排队系统 Geo/M/n 的 k 阶忙期[J]．重庆大学学报，1995，18(4)：

[6] 鲁韦昌，左哲．具有 Bernoulli 反馈的 Geo/Geo/1 排队的逗留时间及队长[J]．重庆通信学院学报，2000，19(3)：36－39．

Service Gated Discrete - time Polling System with Bernoulli Feedback

LU Wei -chang, SUN Rong -heng

(College of Science, Chongqing University, Chongqing 400040, China)

Abstract: This paper analyzes asymmetric limited gated service polling system with Bernoulli feedback. By the imbedded Markov chain theory and the probability generating function method, The authors derive the generating function of intervisit time , polling cycle time , service time of each station and queue length in the each station . Furthermore , the successive sojourn time of customer C in ith station ($i = 1, 2, \cdots N$) and queue length after the ($m-1$)th service are obtained.

Key words: bernoulli feedback; service gated; intervivis time; queue length; sojourn time; polling cycle time.

（责任编辑　张小强）