

文章编号:1000-582X(2003)10-0027-04

# 椭圆单侧问题的边界元计算方法\*

张 凯, 祝家麟, 张 洁

(重庆大学 数理学院, 重庆 400044)

**摘 要:**单侧问题是一类重要的数学物理问题,它可以转化为互补问题进行求解。由于单侧问题的互补条件位于边界之上,特别适用于边界元法。基于 Aitchison 提出的关于 Laplace 算子的开关算法,笔者将之拓广到一般的椭圆型算子,并基于边界元方法应用开关算法,对这一问题给出了简单高效的计算方法,并进行了算法的收敛性分析,最后给出了相应的数值算例。此种算法的优点在于只须在原有的边界元程序中,做少量的改进,并且迭代效率极高,产生的计算误差很小。结果表明,算法简明高效。

**关键词:**边界元; 椭圆算子; 开关算法; 单侧问题

**中图分类号:**O343

**文献标识码:**A

在诸多类型的数学物理问题中,单侧问题是一类典型而又重要的问题,研究这类问题具有很强的代表意义。这类问题来源于许多工程实际问题,比如:流体力学中的半渗透壁问题、水坝的渗流问题、固体力学中的经典接触问题以及电镀问题等,具有很广泛的应用背景。在 20 世纪 70、80 年代 J. L. Lions、Glowinski 等人将单侧问题归化为变分不等式问题<sup>[1,2]</sup>,并用有限元方法进行求解,此种方法需要在问题的求解区域内做大量的网格剖分,而且需要很多的迭代步数。90 年代 H. Han 等人则是把单侧问题中的 Signorini 类问题归化为边界变分不等式用边界元方法求解<sup>[3]</sup>,这样可以避免区域的网格剖分,而在区域边界上进行少量的剖分,但此种方法要涉及到大量的奇异与超奇异积分的计算,同时还要进行大量的迭代。笔者不通过采用边界元法求解变分不等式的途径,而直接用基于开关算法<sup>[4]</sup>的边界元方法求解单侧问题。这种方法迭代步数少,更简单、高效、快速,并可应用于一般椭圆型单侧问题的求解。

## 1 研究的问题

考虑椭圆算子方程:

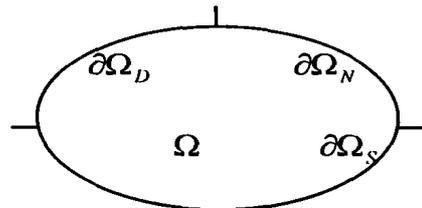
$$L(u) = f$$

其中  $L = \Delta + a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y)$ ,  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$ ,  $c(x, y)$  为系数,  $f$  为自由项。为简化起见,

将以 Laplace 算子为例来研究,即 Poisson 问题的单侧问题(P1)。

$$\begin{aligned} -\Delta u &= b(x), \text{ a. e. in } \Omega \\ u \Big|_{\partial\Omega_D} &= v(x), \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_N} = w(x) \\ \text{(P1)} \quad u &\geq f(x), \frac{\partial u}{\partial n} \geq g(x), \text{ a. e. on } \partial\Omega_S \quad (1) \\ (u - f) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - g \right) &= 0, \text{ a. e. on } \partial\Omega_S \end{aligned}$$

$\Omega$  是  $R^2$  中的一有界区域,  $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_S$  为  $\Omega$  的边界。



假定  $\partial\Omega$  充分光滑。

问题(P1) 是非线性问题,这一类问题通常由工程中的电镀模型、温度控制模型抽象得出。其边界条件都不是由一般的等式关系给出的,因而一般的求解非线性问题的方法是不适用的。Aitchison<sup>[3]</sup> 提出的开关算法很巧妙的解决了这一类问题。开关算法的每一迭代步都是一个临时的线性问题,相对于本文研究的椭圆单侧问题,则每一步都是一个给定通量值与位势值的双侧问题。而边界元方法求解双侧问题是一种简便而

\* 收稿日期:2003-04-05

基金项目:香港理工大学向量极值优化小组基金资助项目

作者简介:张凯(1979-),男,山东人,重庆大学助教,计算数学硕士,主要从事计算数学、计算力学的研究。

又高效的计算方法。正是基于此,笔者给出了椭圆单侧问题的基于开关算法的边界元计算方法。

## 2 基于开关算法的边界元计算方法

### 2.1 (P1)的开关算法

根据 Aitchison<sup>[4]</sup>提出的关于 Laplace 问题的开关算法进行修正,得出了椭圆单侧问题的开关算法,具体实施过程为:

1) 先置  $\partial\Omega_S$  的边界条件为 Dirichlet 条件  $u^k = f(x)$ , 视  $\frac{\partial u}{\partial n}$  为未知量,将单侧问题变为如下普通双侧问题(P2);

$$\begin{aligned} -\Delta u &= b(x), \text{ a. e. in } \Omega \\ \text{P2} \quad u|_{\Gamma_1} &= u_0, \text{ on } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} &= g, \text{ on } \Gamma_2 \end{aligned}$$

2) 求出(P2)的解,得到  $\frac{\partial u^k}{\partial n}$ ; 检验是否满足  $\frac{\partial u^k}{\partial n} \geq g$ :

若满足,则  $u^k$  为所求解;否则,将  $\frac{\partial u^k}{\partial n} < g$  的边界部分  $\partial\Omega_{SD}$  用 Neumann 条件  $\frac{\partial u^k}{\partial n} = g$  替换 Dirichlet 条件  $u^k = f(x)$ ; 又得(P1),解出  $u^{k+1}$ ;

3) 检验是否满足  $u^{k+1} \geq f(x)$ :

若  $u^{k+1} \geq f(x)$ ,则  $u^{k+1}$  为所求解;否则,将  $u^{k+1} < f(x)$  的边界部分  $\partial\Omega_{SN}$  用 Dirichlet 条件  $u^{k+1} = f(x)$  替换 Neumann 条件  $\frac{\partial u^k}{\partial n} = g$ ; 又得(P1),解出  $u^{k+1}$ ;

4) 重复上述过程,直至迭代终止。

### 2.2 双侧问题的边界元解法

(P1)对应的双侧问题为 Poisson 方程边值问题(P2),边界元方法特别适宜于求解此类问题,和其它数值方法比较,它计算准备量小,程序编制简单,计算效率高,精度好。应用边界元方法,须用到基本积分公式和边界积分公式。应用直接边界法的配点法求解(P3)的具体过程可见文献[5]。

### 2.3 基于开关算法的边界元算法:

针对本文解决的问题,可以看出,开关算法的每一步迭代,都是一典型的普通双侧边值问题,而且迭代的过程只是改变边界值,即只在 Dirichlet 条件和 Neumann 条件之间互换。众所周知,边界元法是解决此类问题的简单而且高效的计算方法,很自然的想到在开关算法的过程中应用边界元方法进行求解。对一个具体的问题,在开关算法的每一步都是一个双侧问题,可直接应用上面的边界元计算方法求解,其实质是求解一个线性方程组。由于在求解单侧问题的过程中要进行位势与其法向导数的判断与转化,而在常单元

上只有一个法向,这利于实现这一过程,为此采用常单元的边界元法<sup>[5]</sup>。

具体算法如下:

1) 进行边界离散,得  $\Gamma_H$ ;

2) 进行边界函数  $v(x), w(x)$  与  $f(x), g(x)$  的离散;

3) 置  $K = 0$ ,并置边界条件为 Dirichlet 条件  $u^k = f(x)$ ,视  $\frac{\partial u^k}{\partial n}$  为未知量;

4) 对边界节点进行边界条件的赋值,并建立节点信息;

5) 以边界节点为配置点建立积分方程组;

6) 以边界元展式建立线性方程组;

7) 求解线性方程组,得边界值  $u^0$  与  $\frac{\partial u^0}{\partial n}$ ;

8) 检验是否满足  $\frac{\partial u^k}{\partial n} \geq g$ :

若  $\frac{\partial u^k}{\partial n} \geq g$ ,则  $u^k$  为所求解,停止迭代,转 11; 否则

$\frac{\partial u^k}{\partial n} < g$ ,将的边界部分  $\partial\Omega_{SD}$  用 Neumann 条件  $\frac{\partial u^k}{\partial n} = g$  替换 Dirichlet 条件  $u^k = f(x)$ ,得一普通问题,转 10;

9) 检验是否满足  $u^{k+1} \geq f(x)$ : 若  $u^{k+1} \geq f(x)$ ,则  $u^{k+1}$  为所求解,停止迭代,转 11) 否则,将  $u^{k+1} < f(x)$  的边界部分  $\partial\Omega_{SN}$  用 Dirichlet 条件  $u^{k+1} = f(x)$  替换

Neumann 条件  $\frac{\partial u^k}{\partial n} = g$ ,得一普通问题,转 10;

10) 令  $K = K + 1$ ,转 4);

11) 停止。

这一算法收敛速度很快,计算效率很高,一般问题的迭代次数不会超过互补边界单元的剖分个数,而每一迭代步仅是求解一个线性方程组,计算量少,而且精度很高。

## 3 算法的收敛性

笔者所采用算法的收敛性分析将引用如下两个定理:

定理 1 设  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  满足方程:

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \text{ in } \Omega$$

$L$  为椭圆算子,  $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $b_i = b_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$

假定在  $\Omega$  内  $u \geq M$ ,并且在边界点  $P$  处  $u = M$ ,又假设  $P$  位于一完全包含于  $\Omega$  的圆域内,那么,如果  $u$  在  $\Omega \cup P$  内连续,并且在  $P$  处有外法向存在,就有:要么在  $\Omega$  内  $u \equiv M$ ,要么在  $P$  处  $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ 。

定理的证明见文献[7]。

再将文献[4]中提出的收敛定理加以推广,将其应用到非齐次问题,便有:

**定理 2** 假定  $\Omega$  为一充分光滑的区域,  $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_S$ , 如果在互补边界  $\partial\Omega_S$  处首先置 Dirichlet 初值, 那么开关算法将是收敛的。

**证明** 考虑一种特殊情形: 即在每一迭代步都有  $u \geq f(x)$ ,  $on\partial\Omega_S$ , 这样有开关算法的构造可知, 一旦边界条件开关从 Dirichlet 条件转向 Neumann 条件, 那么这一开关就一直不再转变回来, 即不会发生 Neumann 条件转向 Dirichlet 条件。

考虑开关算法的第  $K$  步迭代, 记  $\partial\Omega_{SD}$  为在第  $K$  步迭代时互补边界  $\partial\Omega_S$  上被置为  $u = f(x)$  的部分, 相应的,  $\partial\Omega_{SN}$  记为剩余的 Neumann 条件占据的部分。这样就有:  $\partial\Omega_S = \partial\Omega_{SN} \cup \partial\Omega_{SD}$ 。从而第  $K$  步迭代解  $u^k$  满足问题  $(P_K)$ :

$$\begin{aligned} L[u^k] &= b(x), \text{ in } \Omega \\ u^k &= v(x), \text{ on } \partial\Omega_D, u^k = f(x), \text{ on } \partial\Omega_{SD} \\ \frac{\partial u^k}{\partial n} &= w(x), \text{ on } \partial\Omega_N, \frac{\partial u^k}{\partial n} = g(x), \text{ on } \partial\Omega_{SN} \end{aligned}$$

假定  $u^k \geq f(x)$   $on\partial\Omega_S$ , 在解出问题  $(P_K)$  后, 记  $\partial\Omega_{SD}$  中  $\frac{\partial u^k}{\partial n} \leq g(x)$  的部分为  $\partial\Omega_{k+1} \subset \partial\Omega_{SD}$ 。那么由开关算法知, 在下一步迭代时,  $\partial\Omega_{k+1}$  上的边界条件将从  $u^k = f(x)$  转为  $\frac{\partial u^k}{\partial n} = g(x)$ 。那么第  $K+1$  步迭代时的问题变为  $(P_{K+1})$ :

$$\begin{aligned} L[u^{k+1}] &= b(x), \text{ in } \Omega \\ u^{k+1} &= v(x), \text{ on } \partial\Omega_D, u^{k+1} = f(x), \text{ on } \partial\Omega_{SD}/\partial\Omega_D \\ \frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} &= w(x), \text{ on } \partial\Omega_N, \frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} = g(x), \text{ on } \partial\Omega_{SN} \end{aligned}$$

$\cup \partial\Omega_{k+1}$

定义  $\phi = u^{k+1} - u^k$ , 显然  $\phi$  满足:

$$\begin{aligned} L[\phi] &= 0, \text{ in } \Omega \\ \phi &= 0, \text{ on } \partial\Omega_D, \phi = 0, \text{ on } \partial\Omega_{SD}/\partial\Omega_{k+1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0, \text{ on } \partial\Omega_N, \frac{\partial \phi}{\partial n} \geq 0, \text{ on } \partial\Omega_{SN} \cup \partial\Omega_{k+1} \end{aligned}$$

由椭圆算子的极值原理知,  $u$  的极小值必在  $\Omega$  的边界上, 又有定理 1 知,  $u$  的极小值不可能在  $\partial\Omega_N, \partial\Omega_{SN}$  或者  $\partial\Omega_{k+1}$  上。因此  $u$  的极小值必在  $\partial\Omega_{SD}/\partial\Omega_D$  上, 且极小值为  $\phi = 0$ 。然而在  $\partial\Omega$  上恒有  $\phi \geq 0$ , 所以在  $\partial\Omega_S \subset \partial\Omega$  上有:

$$\phi = u^{k+1} - u^k \geq 0, \text{ 也即是: } u^{k+1} \geq u^k, \text{ on } \partial\Omega_S。$$

因此可以看出, 要么边界互补条件  $(u - f)(\frac{\partial u}{\partial n} - g) = 0, on\partial\Omega_S$  满足, 要么  $\partial\Omega_S$  上的 Neumann 条件部分增加, 而  $\partial\Omega_S$  是有限长度的, 所以无论以上两种情况中的哪一种出现, 迭代都将终止。

证毕。

在定理 1 中要求边界充分光华, 这条件是十分苛刻的。在实际计算中对有角点的区域开关算法是同样适用的, 只是收敛速度会降低。对于一般区域, 开关算法是收敛的, 而且由后面的算例可知, 收敛速度非常快。本文所采用的开关算法的每一步都要应用边界元算法。从而整个算法的收敛性又与边界元算法有关。而边界元方法的收敛性又与几何剖分以及形函数的选取等有关。一般说来, 剖分越细, 精度越高, 收敛速度越快。这可由后面的算例得到验证。

### 4 数值算例

**算例 1** 考虑如下电镀模型问题<sup>[3]</sup>:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0, \text{ in } \Omega \\ u &\geq -1, \frac{\partial u}{\partial n} \geq -\varepsilon, \text{ on } \Gamma_1 \\ (u + 1)(\frac{\partial u}{\partial n} + \varepsilon) &= 0, \text{ on } \Gamma_1 \\ u|_{\Gamma_1} &= 0, \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_3} = 0 \end{aligned}$$

笔者采用常单元进行求解。对互补边界进行 15 等分的离散。并对  $\varepsilon = 0.7, 0.55$  进行了计算。对互补边界进行 30 等分的离散  $\varepsilon = 0.7$  进行了计算:

下面分别绘出相应的图形(图 1):

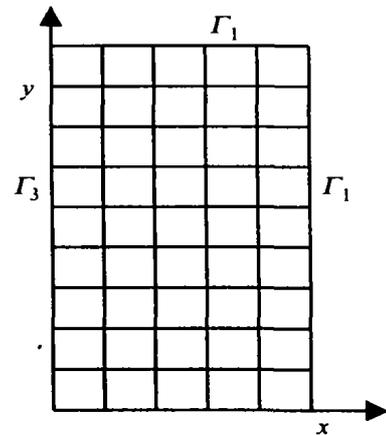


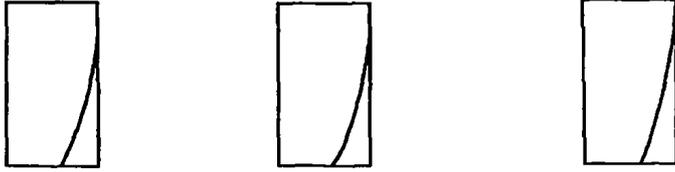
图 1 剖分图

**算例 2** 考虑如下问题<sup>[6]</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \text{ in } \Omega \\ u|_{\Gamma_1} &\geq 0, \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \text{ on } \Gamma_c \\ u \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \text{ on } \Gamma_c \\ u|_{\Gamma_c} &= 0 \\ \Omega &= [0, 1] \times [0, 1], \partial\Omega = \Gamma_c \cup \Gamma_D \\ \Gamma_c &= \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y = 1\} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 10, & x \in [0, 0.5] \times [0, 1] \\ -10, & x \in [0.5, 1] \times [0, 1] \end{cases}$$

对边界采用24等分,区域采用32等分的三角形剖分(图2),取 $y = 0.5$ 上的, $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.8, 0.9$ 处的9个内点值计算,经过一次迭代后,就得解。图3绘出了相应的图形。



$\varepsilon = 0.7$ , 剖分为 15 份  $\varepsilon = 0.7$ , 剖分为 30 份  $\varepsilon = 0.55$ , 剖分为 15 份  
图2 电位图

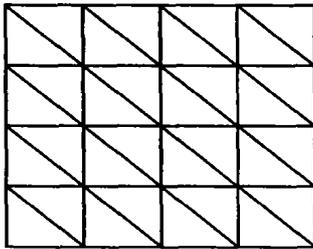


图3 剖分网格

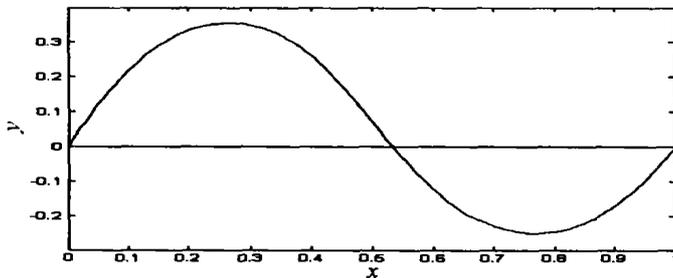


图4  $u(0.5, y)$  处的函数值

## 6 结 论

所提出的解决单侧问题的新的计算方法,是基于开关算法,利用边界元方法进行求解。算法简明高效,并针对算例进行了算法的收敛性与有效性的分析。算例分析表明,该算法简明高效,有效的解决了这一问题,具有很好的工程应用前景。

### 参考文献:

- [1] DUVAUT G, LIONS J I. Inequalities in Mechanics and Physics, Dunod, Paris, 1972.
- [2] GLOWINSKI R. Numerical Methods for Nonlinear Problems, Springer, New York, 1984.
- [3] HAN H D, GUAN Z, YU C Q. The Canonical Boundary Element Analysis of A Electropaint Model, Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities (3) (1988) 101-111.
- [4] AITCHISON J M, POOL M W. a numerical algorithm for the solution of Signorini problems, Journal of Computational and Applied mathematics 94 (1998) 55-67.
- [5] ZHU J L. The Boundary Element Analysis for Elliptic Problems, Science Press, Beijing, 1991.
- [6] WANG C H, WANG L H. The Numerical algorithm of Signorini Problem Based on Dual Variational theory[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2002, 19(1): 149-154.
- [7] PROTTER M H, WEINBERGER H f. Maximum Principles in Differential Equations[M]. Springer, Berlin, 1984.

## The BEM for Elliptic Unilateral Problems

ZHANG Kai, ZHU Jia-lin

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** Unilateral problems is a kind of important partial differential problems. It can be solved by treating it as a complementary problem. As the complementary conditions lie in the boundary of the region, it is suitable for BEM. This paper is based on the switching algorithm, which is first used by J. M. Aitchison for the Signorini Problems of Laplace operator, then extends it to the elliptic operator, and conjunct it with the BEM. At last the detail of the algorithm is given. The new algorithm is easy to be implied effectively and quickly. It only needs the minimal change of the BEM programming. The numerical tests show the algorithm is effective and conventional.

**Key words:** boundary element method; elliptic operator; switching algorithm; unilateral problem

(编辑 吕赛英)